1 Funkce více proměnných

Definice 1 (parciální derivace)**.** *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i \in \{1, \dots, d\}$. Parciální derivaci funkce f v bodě a vzhledem k i-té souřadnici (podle x_i) definujeme jako*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t},$$

pokud limita napravo existuje.

Parciální defivaci 2. řádu funkce f v bodě a vzhledem k i-té a následně j-té souřadnice pak definujeme jako $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ a značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$. Parciální derivace vyšších řádů definujeme analogicky.

Definice 2 (totální diferenciál)**.** *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Lineální zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ nazýváme totálním diferenciálem (derivací) funkce f v bodě a (značíme $df(a)$, $f'(a)$, $D_f(a)$) pokud platí*

$$\lim_{h \to (0,\dots,0)} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|}.$$

Poznámky a příklady.

1. *Pro $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$ zpravidla používáme zápis $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ (a podobně pro derivace vyšších řádů).*

2. *Parciální derivace a totální diferenciál definujeme podobně i pro zobrazení $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, která derivujeme po složkách, tedy například*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(a)\right)^T.$$

3. *Označíme-li $\varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|}$, $h \neq 0$, potom platí*

$$f(a+h) - f(a) = Lh + |h|\varphi(h),$$

kde $\varphi(h) \to 0$, pro $h \to 0$. Toto je triviální, ale velice užitečná reformulace definice totálního diferenciálu.

4. *Podobně jako parciální derivace definujeme i derivaci v obecném směru $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ jako*

$$D_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Platí tedy, že parciální derivace podle x_i je směrovou derivací ve směru e_i.

Věta 3 (vlastnosti totálního diferenciálu)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^d \supset D_f \to \mathbb{R}$ má totální d9ferenciál v bodě a, potom platí*

1. *f je spojitá v a,*
2. *existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \ldots, d$ a platí $df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{d} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.*

Vektoru

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \right).$$

říkáme gradient funkce f v bodě a. Analogií gradientu pro zobrazení je Jacobiho matice (zobrazení F v bodě a) definovaná jako

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix},$$

přičemž opět platí $dF(a) \cdot h = J_f(a) \cdot h$.

Věta 4 (parciální derivace a totální diferenciál)**.** *Nechť f má všechny parciální derivace* 1. *řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^d$, potom*

1. *jsou-li všechny parciální derivace* 1. *řádu omezené na okolí bodu a, potom je f spojitá v bodě a,*
2. *jsou-li všechny parciální derivace* 1. *řádu spojité v bodě a, potom f má v bodě a totální diferenciál.*