Platí následující tvrzení: pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale nekonverguje absolutně (v takovém případě říkáme, že konverguje neabsolutně) potom

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_- = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_+ = \infty,$$

kde $x_\pm = \max(\pm x, 0)$ značí kladnou a zápornou část x.

Na druhou stranu platí následující charakterizace absolutní konvergence:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_- < \infty\right) \wedge \left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_+ < \infty\right)\right].$$

Neabsolutně konvergentní řady mají i následující pozoruhodnou vlastnost: pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale nekonverguje absolutně a $s \in \mathbb{R}^*$, potom existuje bijekce $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s.$$

Takovou řadu označujeme za přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a speciálně tedy platí, že u neabsolutně konvergentních řad součet na přerovnání závisí.

U absolutně konvergentních řad je situace opět naprosto opačná. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, potom pro každou bijekci $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Součet tedy v tomto případě na přerovnání nezávisí.

Věta 1 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti s reálnými členy, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní.*

Pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *(Dirichlet) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená,*
- *(Abel) posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje,*

potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

0.1 Součin řad

Definice 2 (Cauchyův součin řad). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou nekonečné řady, potom jejich Cauchyův součin definujeme jako řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$*, kde*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

Věta 3 (součin řad). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou absolutně konvergentní řady se součty* A*, resp.* B*, potom jejich Cauchyův součin konverguje absolutně a má součet* $A \cdot B$*.*

Pro (neabsolutně konvergentní řadu) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ platí, že limita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n-k+1}$$

neexistuje, součin této řady se sebou samou tedy nekonverguje. Pokud položíme

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

potom (po úpravách za využití binomické věty a předchozí věty o součinu řad) dostaneme

$$\begin{aligned}\exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).\end{aligned}$$

Stačí ještě dokázat, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1,$$

a budeme konečně mít dobře definovanou exponenciální funkci. Porovně můžeme definovat

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

0.2 Posloupnosti a řady komplexních čísel

Posloupnosti a řady komplexních čísel definujeme analogicky k reálnému případu. Posloupností myslíme zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ a opět používáme značení a_n místo $f(n)$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Limitu definujeme obdobně (pro $L \in \mathbb{C}$)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Zde používáme obvyklé značení $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Nekonečné řady a jejich součty definijeme opět analogicky k reálnému případu (používáme limity částečných součtů).

Je dobré si uvědomit, že v jistém smyslu nejde v zásadě o nic nového, protože řady komplexních čísel můžeme studovat po složkách, platí totiž

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n i) = a + bi \quad \iff \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a\right) \wedge \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b\right).$$

Speciálně tedy platí, že vyšetřování konvergence řad komplexních čísel lze (alespoň teoreticky) převést na vyšetrování konvergence řad reálných čísel. Rovněž stále platí nutná podmínka konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a i tvrzení

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje (tj. má součet v } \mathbb{C}).$$

Platí i věta o součinu řad (pro absolutně konvergentní řady). Speciálně tedy můžeme rozšířit definici exponenciální funce na $\mathbb{C}$ a bude stále platit $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Odtut snadno odvodíme

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Toho jsme využili k důkazu následujícího užitečného tvrzení: je-li $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, potom mají řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$$

omezené posloupnosti částečných osučtů. V kombinaci s Dirichletovým kritériem tedy dostaneme například konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

1 Mocninné řady

Definice 4 (mocninná řada)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost kompexních čísel a $z_0 \in \mathbb{C}$. Symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ budeme nazývat mocninnou řadou se středem z_0.*

Poznámky a příklady. *1. Formálním dosazením konkrétní hodnoty $z \in \mathbb{C}$ do mocninné řady dostaneme klasickou číselnou řadu, kterou můžeme studovat obvyklými metodami.*

2. Například volbou $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme geometrickou řadu, pro tu platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} \textit{konverguje absolutně pro } |z| < 1 \\ \textit{nesplňuje nutnou podmínku konvergence pro } |z| > 1. \end{cases}$$

Volbou $a_n = \frac{1}{n!}$ dostaneme řadu definující exponenciální funkci, která konverguje absolutně pro všechna $z \in \mathbb{C}$.