Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 0.1 (primitivní funkce)**.** *Říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na (otevřeném) intervalu I pokud $F' = f$ na I.*

Definice 0.2 (neurčitý integrál)**.** *Množinu všech primitivních funkcí k funkci f (na I) značíme $\int f(x)\,dx$ a nazýváme neurčitým integrálem funkce f (na I).*

Je-li F primitivní funkcí k funkci f, platí $\int f(x)\ dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$, což zkráceně zapisujeme $\int f(x)\ dx \stackrel{c}{=} F(x)$ a říkáme, že neurčitý integrál z funkce f je až na konstantu roven funkci F. Často též uvidíte zápis $\int f(x)\ dx = F(x)+C$. Rovněž často vynecháváme závislost na x i symbol dx.

Věta 0.3 (linearita primitivních funkcí)**.** *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f a G primitivní funkcí k funkci g (obojí na intervalu I) a buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k funkci $\alpha f + \beta g$ (na intervalu I).*

Věta 0.4 (per partes pro neurčitý integrál)**.** *Nechť f a g jsou definované na intervalu (a, b) a nechť f' a g' existují (vlastní) na (a, b). Potom*

$$\int fg' = fg - \int f'g \quad (\textit{na } I),$$

pokud integrál napravo existuje.

Věta 0.5 (1. věta o substituci pro neurčitý integrál)**.** *Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ mají vlastní derivaci ve všech bodech intervalu (a, b) resp. (α, β). Potom*

$$\int \varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)\ dt \stackrel{c}{=} f \circ \varphi \quad \textit{na } (\alpha, \beta).$$

Věta 0.6 (2. věta o substituci pro neurčitý integrál)**.** *Nechť φ má vlastní a všude kladnou, nebo všude zápornou derivaci na intervalu (α, β) a nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \stackrel{na}{\to} (a, b)$. Pokud ja f definována na intervalu (a, b) a H je primitivní funkce k $\varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)$ na (α, β), potom*

$$\int f(t)\ dt \stackrel{c}{=} H \circ \varphi^{-1}(t) \quad \textit{na } (a, b).$$