Definice 1 (vnitřek, uzávěr a hranice). *Nechť (M, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq M$. Potom definujeme*

- *uzávěr množiny A (vzhledem k ρ) jako průnik všech uzavřených množin v M obsahujících A (značíme $\overline{A}$),*
- *vnitřek množiny A (vzhledem k ρ) jako sjednocení všech otevřených množin v M obsažených v A (značíme A°),*
- *hranici množiny A (vzhledem k ρ) jako $\partial A = \overline{A} \cap \overline{M \setminus A}$ (alternativně $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$)*

Snadno nahlédneme, že $\overline{A}$ je vždy uzavřená množina (je to nejmenší uzavřená množina obsahující A), A° je vždy otevřená množina (je to největší otevřená množina obsažená v A) a ∂A je vždy uzavřená.

Pro $A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ platí

$$A^\circ = \{x^2 + y^2 < 1\}, \quad \partial A = \{x^2 + y^2 = 1\}, \quad \overline{A} = A = \overline{A^\circ}.$$

Poznamenejme, že poslední rovnost neplatí vždy (množina může mít prázdný vnitřek). Rovněž platí, že je-li a hromadným bodem A, pak $a \in \overline{A}$ ($\overline{A}$ je ve skutečnosti sjednocením A a všech jeho hromadných bodů).

Definice 2 (limita v metrickém prostoru). *Nechť (M, ρ) a (X, d) jsou dva metrické prostory a $\varphi : M \to X$, $A \subseteq M$ a a hromadný bod A. Potom říkáme že $b \in X$ je*

- *limitou zobrazení φ v bodě a vzhledem k množině A (značíme $\lim\limits_{A \ni x \to a} \varphi(x) = b$), pokud platí*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall x \in P_\rho(x, \delta) \cap A : \varphi(x) \in U_d(b, \varepsilon),$$

- *limitou zobrazení φ v bodě a (značíme $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$) pokud platí $\lim\limits_{M \ni x \to a} \varphi(x) = b$.*

Poznámky a příklady. *1. pro takto definované limity platí mnoho vět, které známe u funkcí jedné proměnné (především jednoznačnost limity, limita složené funkce, Heineho věta, ale i mnoho dalších), pro případ $X = \mathbb{R}$ můžeme přidat i aritmetiku limit a dva strážníky.*

2. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \qquad \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ *neexistuje.*

Dále definujeme následující dvě důležIté třídy metrických prostorů:

- úplné prostory jako prostory pro které platí

  $\{x_n\}$ konvergentní $\iff \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N : |x_n - x_m| < 0$

  (tedy zhruba řečeno prostory, kde platí věta o Bolzano-Cauchyově podmínce)

- kompaktní prostory, kde zhruba řečeno platí Bolzano-Weierstrassova věta, tedy:

Definice 3 (kompaktní metrický prostor)**.** *Metrický prostor* (M, ρ) *nazýváme kompaktní, pokud platí, že každá posloupnost v* M *má konvergentní podposloupnost (v* M *vzhledem k* ρ*).*

Platí, že $\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor, $\mathbb{Q}$ není úplný, $[0, 1]$ je kompaktní (Bolzano-Weierstrassova věta), $\mathbb{R}$ není kompaktní (vše s obvyklou metrikou na $\mathbb{R}$, rezp. zděděnou z $\mathbb{R}$).

Normované lineární prostory, které jsou úplné nazýváme Banachovy (např. $C([0, 1])$), prostory se skalárním součinem, které jsou úplné pak Hilbertovy (např. l_2).