1 Diferenciální rovnice

Definice 1 (Obyčejná diferenciální rovnice)**.** *Obyčejnou diferenciální rovnicí (krátce ODR) budeme nazývat rovnici ve tvaru*

$$F(f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x), \dots, f'(x), f(x), x) = 0, \tag{ODR}$$

kde $F : \mathbb{R}^{n+2} \supseteq D_F \to \mathbb{R}$ je nějaká funkce.

Definice 2 (Řešení ODR)**.** *Funkci f definovanou na neprázdném otevřeném intervalu I nazýváme řešením rovnice* (ODR)*, pokud má ve všech bodech I vlastní derivaci až do řádu n a ve všech bodech x splňuje rovnici* (ODR)*.*

Maximálním řešením rovncie (ODR) *nazýváme takové její řešení f, že neexistuje jiné její řešení g splňující $D_f \subsetneq D_g$.*

Poznámky a příklady. *1. Neznámou funkci často označujeme $y(x)$ a často také vynecháváme proměnnou x. Rovnice, které splňují naši definici jsou například*

$$y' - y = 0, \quad y'' + y = 0, \quad (y''')^2 y - \sin x = 0,$$

(zde by odpovídající funkce F na levé straně byly $F(u,v,w) = u - v$, $F(u,v,w,z) = u^2 + w$ a $F(u,v,w,z,t) = u^2 w - \sin t$). Například rovnice $y'(y) = 0$ ale definici nesplňuje.

2. Řádem rovnice (ODR) *označujeme takové k, že $f^{(k)}$ je nejvyšší derivace, která se netriviálně v rovnici vyskytuje (obecně spíše neformální, ale v konkrétních případech bude dávat dobrý smysl).*

Rovnici (ODR) *pak často uvažujeme i ve tvaru rozřešeném vzhledem k nejvyšší derivaci, tedy ve tvaru*

$$f^{(n)}(x) = G(y^{(n-1)}, \dots, f', f, x). \tag{1}$$

Rovněž často uvažujeme vektorovou ODR (soustavu), kde pro nás bude základním příkladem soustava rovnice 1. *řádu vyřešená vzhledem k (první) derivaci*

$$\begin{aligned} f_1' &= F_1(f_1, \dots, f_n, x), \\ f_2' &= F_2(f_1, \dots, f_n, x), \\ &\vdots \\ f_n' &= F_n(f_1, \dots, f_n, x), \end{aligned} \tag{2}$$

případně ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{f}' = \mathbf{F}(\mathbf{f}, x),$$

kde

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n), \quad \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n).$$

Každou rovnici tvaru (1) můžeme ekvivalentně zapsav ve tvaru (2) pomocí substituce

$$g_1 = f, \quad g_2 = f', \dots, g_n = f^{(n-1)},$$

ta pak dává

$$\begin{aligned} g_1' &= g_2, \\ g_2' &= g_3, \\ &\vdots \\ g_n' &= G(g_n, g_{n-1}, \dots, g_1, x). \end{aligned}$$

Např. rovnici $y'' = -y$ můžeme takto (pomocí $y_1 = y$ a $y_2 = y'$) převést na soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_1. \end{aligned}$$

Tu pak můžeme zapsat i v maticovém zápisu

$$\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y},$$

kde

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1 Rovnice 1. řádu

Začneme z rovnicemi 1. řádu, ty budeme zpravidla uvažovat ve tvaru rozřešeném vzhledem k (první) derivaci, tedy

$$y' = F(x, y).$$

Popisují zpravidla růst/pokles nějaké veličiny, např.

$$y' = ay,$$

pro $a > 0$ neomezený růst populace, pro $a < 0$ jednoduchý model chemické reakce,

$$y' = ay\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

omezený růst populace, kde M udává maximální kapacitu prostředí.