Věta 0.1 (derivace a monotonie - kdysi jako Věta **??**). *Je-li $f \in C((a,b))$ a existuje-li f' na (a,b), potom:*

1. *pokud $f' > 0$ na (a,b), potom f je rostoucí na (a,b),*
2. *pokud $f' < 0$ na (a,b), potom f je klesající na (a,b),*
3. *pokud $f' \geq 0$ na (a,b), potom f je neklesající na (a,b),*
4. *pokud $f' \leq 0$ na (a,b), potom f je nerostoucí na (a,b).*

Poznámky a příklady.

- *předpoklady předchozí věty můžeme nahradit předpokladem f' existuje na (a,b) vlastní (existence vlastní derivace implikuje spojitost)*
- *pokud bychon navíc předpokládali $f \in C([a,b])$, platila by (odpovídající) monotonie na $[a,b]$ (a analogicky pro $(a,b]$ a $[a,b)$)*
- *implikace (3) a (4) lze nahradit ekvivalencemi, implikace (1) a (2) však ekvivalencemi nahradit nelze (př. x^3 a $-x^3$)*
- *určení intervalů monotónie může pomoci při zkoumání extrémů, vrátíme-li se k příkladu $f(x) = x^3 - x$ (tentokrát $x \in \mathbb{R}$), už víme, že lokální extrémy mohou být pouze v bodech $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (nezjistili jsme však, jestli to opravdu lokální extrémy jsou). Protože $f'(x) = 3x^2 - 1$ platí*

  $$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty), \quad f'(x) < 0 \iff x \in (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

  a věta dává

  $$f \text{ je rostoucí na } (-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \text{ a } (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty) \text{ a klesající na } (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

  a podle poznámky výše dokonce (f je spojitá na $\mathbb{R}$)

  $$f \text{ je rostoucí na } (-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}] \text{ a } [\tfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty) \text{ a klesající na } [-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}].$$

  To pak okamžitě dává, že $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ je bodem lokálního maxima f a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ je bodem lokálního minima f. Poznamenejme, že v úvaze jsme nikde nepotřebovali fakt, že $f' = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$. Stejná úvaha by byla možná i kdyby derivace v těchto bodech neexistovala.

Definice 0.2 (konvexní a konkávní funkce). *Budeme říkat, že funkce f je na intervalu I*

- *konvexní, pokud $f(y) \leq f(x) + \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$ pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*
- *konkávní, pokud $f(y) \geq f(x) + \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$ pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*

- *ryze konvexní, pokud* $f(y) < f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x)$ *pro každé* $x, y, z \in I$, $x < y < z$,
- *ryze konkávní, pokud* $f(y) > f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x)$ *pro každé* $x, y, z \in I$, $x < y < z$,

Konvexitu můžeme ekvivalentně formulovat pomocí následujících podmínek

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \quad x, y, z \in I,\ x < y < z,$$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}, \quad x, y, z \in I,\ x < y < z,$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}, \quad x, y, z \in I,\ x < y < z,$$

a

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad x, y \in I,\ 0 < \lambda < 1,$$

což lze přeformulovat jako

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leq \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y), \quad x, y \in I,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Alanogicky můžeme reformulovat konkávitu a ryzí varianty. Poslední formulace má přímé zobecnění ve formě tzv. Jansenovy nerovnosti:

Věta 0.3 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť f je konvexní na intervalu I, potom pro všechna $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in (0, 1)$, splňující $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ platí*

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i)$$

a analogicky s opačnou nerovností pro f konkávní.

Věta 0.4 ((druhá) derivace a konvexita/konkávnita)**.** *Je-li $f, f' \in C((a, b))$ a existuje-li f'' na (a, b), potom:*

1. *pokud $f'' > 0$ na (a, b), potom f je ryze konvexní na (a, b),*
2. *pokud $f'' < 0$ na (a, b), potom f je ryze konkávní na (a, b),*
3. *pokud $f'' \geq 0$ na (a, b), potom f je konvexní na (a, b),*
4. *pokud $f'' \leq 0$ na (a, b), potom f je konkávní na (a, b).*

Platí podobné poznámky jako pro Větu 0.1 (rozšiřování na uzavřené intervaly a ekvivalenci při neostrých nerovnostech).