1 Taylorovy polynomy

Definice 1.1 (Taylorův polynom) *Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a buď $n \in \mathbb{N}$. Nechť existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ (nebo, ekvivalentně, existují $f^{(k)} \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$). Potom definujeme polynom*

$$T^f_{a,n}(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

a nazýváme ho Taylorův polynom funkce f stupně n se středem v bodě a.

Poznámka 1.2 *Platí $(T^f_{a,n})^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, \dots, n$ (zde užíváme konvenci $f^{(0)} = f$). Polynom $T^f_{a,n}$ je zároveň jediný polynom stupně nejvýše n s touto vlastností.*

Věta 1.3 (Peanův tvar zbytku) *Platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Věta 1.4 (Rolleova) *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ $(a < b)$ a nechť f' existuje na (a, b). Pokud $f(a) = f(b)$, potom existuje $\xi \in (a, b)$ splňující $f'(\xi) = 0$*

Věta 1.5 (Lagrangeova o střední hodnotě) *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ $(a < b)$ a nechť f' existuje na (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ splňující $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Věta 1.6 (Cauchyova o střední hodnotě) *Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ $(a < b)$ a nechť f' i g' existují na (a, b). Nechť $g(a) \neq g(b)$ a $g' \neq 0$ na (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ splňující $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.*

Věta 1.7 (Lagrangeův tvar zbytku) *Nechť f je reálná funkce definovaná na otevřeném intervalu obsahujícím interval $[a, x]$ $(a < x)$. Nechť $f^{(n)}$ existuje a je spojitá na $[a, x]$ a nechť $f^{(n+1)}$ existuje na (a, x). Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T^f_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Poznámka 1.8

1. *Obdobné tvrzení platí i pro $x < a$.*
2. *V důkazu předchozí věty jsme využili Cauchyovu větu o střední hodnotě s funkcí $g(t) = (x-t)^{n+1}$. Kdybychom místo toho použili funkci $g(t) = x-t$, dostali bychom tvar zbytku v tzv. Cauchyově tvaru,*

$$f(x) - T^f_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a).$$

Věta 1.9 (Darbouxova vlastnost derivace) *Nechť f' existuje na otevřeném intervalu obsahujícím interval $[a, b]$ a nechť $f'(a) < f'(b)$. Potom pro každé $z \in (f'(a), f'(b))$ existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = z$.*

2 Primitivní funkce

Definice 2.1 (primitivní funkce) *Říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na (otevřeném) intervalu I pokud $F' = f$ na I.*

Poznámka 2.2 *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f and intervalu I a $C \in \mathbb{R}$. Potom $F + C$ je rovněž primitivní funkcí k funkci f and intervalu I.*

Věta 2.3 (primitivní funkce se liší o konstantu) *Nechť F a G jsou dvě primitivní funkce k funkci f (na intervalu I). Potom existuje $C \in \mathbb{R}$, že $F = G + C$ (na I).*

Definice 2.4 (neurčitý integrál) *Množinu všech primitivních funkcí k funkci f (na I) značíme $\int f(x)\,dx$ (nebo zkráceně $\int f$) a nazýváme neurčitým integrálem funkce f (na I).*

Poznámka 2.5 *Je-li F primitivní funkcí k funkci f, platí $\int f(x)\,dx = \{F + C : C \in \mathbb{N}\}$, což zkráceně zapisujeme $\int f(x)\,dx \overset{c}{=} F$ (nebo $\int f \overset{c}{=} F$) a říkáme, že neurčitý integrál z funkce f je až na konstantu roven funkci F.*

Věta 2.6 (linearita primitivních funkcí) *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f a G primitivní funkcí k funkci g (obojí na intervalu I) a buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k funkci $\alpha f + \beta g$ (na intervalu I).*

Věta 2.7 (o existenci primitivní funkce pro spojité funkce) *Nechť f je spojitá na otevřeném intervalu I, potom F má na I primitivní funkci.*

Věta 2.8 (per partes pro neurčitý integrál) *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f a G primitivní funkcí k funkci g (obojí na intervalu I) a nechť f je spojitá na I. Potom*

$$\int Fg = FG - \int fG \quad \text{(na } I\text{)}.$$

Věta 2.9 (1. věta o substituci pro neurčitý integrál) *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) a nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má vlastní derivaci ve všech bodech intervalu (α, β). Potom*

$$\int \varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)\,dt \overset{c}{=} F \circ \varphi \quad \text{na } (\alpha, \beta).$$

Věta 2.10 (2. věta o substituci pro neurčitý integrál) *Nechť φ má vlastní a nenulovou derivaci ve všech bodech intervalu (α, β) a nechť $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Pokud pro f definovanou na intervalu (a, b) platí*

$$\int \varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)\,dt \overset{c}{=} G(t) \quad \text{na } (\alpha, \beta)$$

potom

$$\int f(t)\,dt \overset{c}{=} G \circ \varphi^{-1}(t) \quad \text{na } (a, b).$$

Věta 2.11 (o rozkladu na parciální zlomky) *Nechť P a Q jsou polynomy splňující* $\deg P < \deg Q$. *Nechť*

$$Q(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_l)^{m_l} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{m_1} \cdots (x^2+b_kx+c_k)^{n_k},$$

$m_i, n_j \in \mathbb{N}$, *kde všechny lineární členy i všechny kvadratické členy jsou po dvou různé a navíc žádný kvadratický člen nemá reálné kořeny. Potom*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{m_i} \frac{A_m^i}{(x-a_i)^m} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{n_j} \frac{B_n^j x + C_n^j}{(x^2+b_jx+c_j)^n}$$

pro nějaká $A_m^i, B_n^j, C_n^j \in \mathbb{R}$. *Takový rozklad je navíc určen jednoznačně.*

3 Riemannův integrál

Definice 3.1 (dělení intervalu) *Buď* $[a,b]$ *interval v* $\mathbb{R}$. *Konečnou posloupnost* $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ *nazveme dělením intervalu* $[a,b]$ *pokud* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Body* x_i *nazýváme dělícími body dělení* D. *Množinu všech dělení intervalu* $[a,b]$ *značíme* $\mathfrak{D}([a,b])$.

Jsou-li $D, D' \in \mathfrak{D}([a,b])$, *říkáme, že* D' *je zjemněním* D *pokud všechny dělící body* D *jsou zároveň dělícími body* D'.

Definice 3.2 (horní a dolní součty) *Nechť f je omezená funkce na intervalu* $[a,b]$ *a* $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}([a,b])$. *Definujeme horní a dolní (riemannovské) součty funkce f vzhledem k dělení D jako*

$$S(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \cdot (x_{i+1}-x_i)$$

a

$$s(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \cdot (x_{i+1}-x_i).$$

Definice 3.3 (Riemannův integrál) *Nechť f je omezená funkce na intervalu* $[a,b]$, *definujeme horní Riemannův integrál funkce f na intervalu* $[a,b]$ *(nebo od a do b) jako*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f,D) : D \in \mathfrak{D}([a,b])\}.$$

a dolní Riemannův integrál funkce f na intervalu $[a,b]$ *(nebo od a do b) jako*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,D) : D \in \mathfrak{D}([a,b])\}$$

Pokud $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ *říkáme, že f je riemannovsky integrovatelná na intefřvalu* $[a,b]$ *(značíme* $f \in \mathfrak{R}([a,b])$*). Společnou hodnotu pak nazýváme Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $[a,b]$ *a značíme*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Věta 3.4 (vlastnosti dělení) *Nechť f je omezená na intervalu $[a,b]$ a nechť $D, D' \in \mathfrak{D}([a,b])$ potom*

1. *pokud D' je zjemněním D, pak*
$$s(f,D) \le s(f,D') \le S(f,D') \le S(f,D),$$
2. *$s(f,D) \le S(f,D')$, speciálně $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$*

Věta 3.5 (vlastnosti Riemannova inregrálu) *Platí následující:*

1. *nechť $f,g \in \mathfrak{R}([a,b])$, $f \le g$ na $[a,b]$, protom*
$$\int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt,$$
2. *je-li $f,g \in \mathfrak{R}([a,b])$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom i $f+g, \alpha f \in \mathfrak{R}([a,b])$ a platí*
$$\int_a^b f(t)+g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \quad a \quad \int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt,$$
3. *je-li $f \in \mathfrak{R}([a,b])$ potom i $|f| \in \mathfrak{R}([a,b])$ a platí*
$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \alpha \int_a^b |f(t)|\,dt,$$
4. *nechť $f \in \mathfrak{R}([a,b])$, pokud $f = g$ na $[a,b]$ až na konečně mnoho bodů, potom $g \in \mathfrak{R}([a,b])$ a platí*
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt,$$
5. *je-li $f \in \mathfrak{R}([a,b])$ a $f \in \mathfrak{R}([b,c])$, potom $f \in \mathfrak{R}([a,c])$ a platí*
$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

Věta 3.6 (nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu) *Pro funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí*
$$f \in \mathfrak{R}([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists D \in \mathfrak{D}([a,b]) : S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Definice 3.7 (stejnoměrná spojitost) *Říkáme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá, pokud platí následující výrok*
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in M : |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$
Říkáme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá na množině K, pokud $f|_K$ je stejnoměrně spojitá.

Věta 3.8 (stejnoměrná spojitost spojitých funkcí) *Je-li f spojitá na $[a, b]$ potom je i stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

Věta 3.9 (integrovatelnost spojitých funkcí) *Je-li f spojitá na $[a, b]$, potom platí $f \in \Re([a, b])$.*

Věta 3.10 (integrovatelnost monotónních funkcí) *Je-li f monotónní na $[a, b]$, potom platí $f \in \Re([a, b])$.*

Věta 3.11 (závislost integrálu na horní mezi) *Nechť pro $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ platí, že $f \in \Re([\alpha, \beta])$ pro každý interval $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Zvolme $c \in (a, b)$ a položme*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt.$$

Potom

1. *F je spojitá na (a, b),*
2. *je-li f spojitá v bodě y, potom $F'(y)$ existuje a platí $F'(y) = f(y)$.*

Věta 3.12 (spojitost a primitivní funkce) *Platí nádledující:*

1. *nechť f je spojitá na intervalu (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, potom f má na (a, b) primitivní funkci,*
2. *nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a nechť f má na (a, b) primitivní funkci F, potom*

$$(R) \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

Definice 3.13 (Newtonův integrál) *Nechť f je definována na intervalu (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ a má na (a, b) primitivní funkci F. Definujeme Newtonův integrál z funkce f na od a do b jako*

$$(N) \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x),$$

pokud má výraz na pravé straně smysl. V takovém případě říkáme, že f je newtonovsky integrovatelná na (a, b) (píšeme $f \in \mathcal{N}(a, b)$).

Výraz $\lim\limits_{x \to b-} F(x) - \lim\limits_{x \to a+} F(x)$ nazýváme přírůstkem funkce F od a do b a zkráceně jej značíme $[F(x)]_a^b$.

Definice 3.14 (derivace na intervalu) *Nechť f je definována na $[a, b]$, $a < b$. Říkáme, že f má na intervalu $[a, b]$ derivaci f' pokud existuje $\tilde{f}$ definována na intervalu $(\alpha, \beta) \supset [a, b]$ taková, že $\tilde{f}'$ existuje na (α, β) a $\tilde{f}' = f'$ na $[a, b]$.*

Věta 3.15 (výpočet určitého integrálu) *Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mají spojitou derivaci na $[a, b]$, resp. na $[\alpha, \beta]$. Potom*

1. *(per partes)* $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [F(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$,
2. *(1. věta o substituci)* $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi'(t)\cdot f\circ\varphi(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$,
3. *(2. věta o substituci) pokud je* φ' *nenulová na* $[\alpha,\beta]$, *pak*
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \varphi'(t)\cdot f\circ\varphi(t)\,dt = \int_a^b |\varphi'(t)|\cdot f\circ\varphi(t)\,dt.$$

Aplikace určitého integrálu

Definice 3.16 (plocha pod grafem a mezi grafy) *Nechť* f *je spojitá a nezáporná na intervalu* $[a,b]$, *potom definujeme plochu pod grafem* f *na intrervalu* $[a,b]$ *jako*
$$P(f,[a,b]) = \int_a^b f(t)\,dt.$$
Podobně definujeme plochu mezi grafy spojitých funkcí f *a* g *(na* $[a,b]$*) pro které platí* $f\le g$ *na* $[a,b]$ *jako*
$$P(f,g,[a,b]) = \int_a^b g(t)-f(t)\,dt.$$

Poznámka 3.17 *Veličiny* $P(f,[a,b])$, *resp.* $P(f,g,[a,b])$ *odpoví ploše množin* $\{(x,y): x\in[a,b],\ 0\le y\le f(x)\}$, *resp.* $\{(x,y): x\in[a,b],\ f(x)\le y\le g(x)\}$.

Definice 3.18 (délka křivky) *Nechť* $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^d$, $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_d)$, *je spojitá (tedy* $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ *jsou spojité). Potom definujeme délku křivky* φ *jako*
$$l(\varphi) = \sup\{L(\varphi,D): D\in\mathfrak{D}([a,b])\},$$
kde
$$L(\varphi,D) = \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)|, \quad D\in\mathfrak{D}([a,b]).$$

Věta 3.19 (výpočet délky křivky) *Nechť* $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^d$ *je taková, že všechny složky* $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ *mají spojitou derivaci na* $[a,b]$. *Potom*
$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^d (\varphi_i'(t))^2}\,dt$$

Věta 3.20 (integrální kriterium konvergence řad) *Nechť* $\sum_{i=1}^\infty a_n$ *je řada s nezápornými členy a nechť* f *je nezáporná, nerostoucí a spojitá na intervalu* $[n_0,\infty)$ *pro nějaké* $n_0\in\mathbb{N}$. *Pokud* $a_n=f(n)$, $n\ge n_0$, *potom*
$$\sum_{i=1}^\infty a_n<\infty \iff (N)\int_{n_0}^\infty f(x)\,dx<\infty.$$

4 Funkce více proměnných

Pro $x, y \in \mathbb{R}^d$ definujeme (eukleidovskou) vzdálenost x a y jako $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)^2}$.

Definice 4.1 (okolí a prstencové okolí v $\mathbb{R}^d$) *Nechť $x \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme okolí bodu x s poloměrem ε jako $U(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| < \varepsilon\}$. Obdobně definujeme prostencové okolí bodu x s poloměrem ε jako $P(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$.*

Definice 4.2 (otevřená množina v $\mathbb{R}^d$) *Říkáme, množina $M \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, pokud pro každé $x \in M$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U(x, \varepsilon) \subset M$.*

Definice 4.3 (limita funkcí více proměnných) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}^d$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Potom:*

1. *pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U(a, \varepsilon) \subset M$, pak říkáme, že f má v bodě a limitu A, pokud*
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : y \in P(a, \delta) \implies f(y) \in U(A, \varepsilon),$$
v takovém případě píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$,

2. *říkáme, že f má v bodě a limitu A vzhledem k množině M, pokud*
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : y \in P(a, \delta) \cap M \implies f(y) \in U(A, \varepsilon),$$
v takovém případě píšeme $\lim\limits_{M \ni x \to a} f(x) = A$

Definice 4.4 (spojitost funkcí více proměnných) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$, $a \in M$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Říkáme, že f je spojitá v bodě a, pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Říkáme, že f je spojitá v bodě a vzhledem k množině M, pokud $\lim\limits_{M \ni x \to a} f(x) = A$.*

Definice 4.5 (parciální derivace) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i \in \{1, \ldots, d\}$. Říkáme, že f má v bodě a parciální derivaci vzhledem k i-té souřadnici (podle x_i), pokud existuje limita*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_d) - f(a_1, \ldots, a_d)}{t}.$$

V takovém případě pak tuto hodnotu značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (a nazýváme ji parciální derivací funkce f vzhledem k i-té souřadnici).

Definice 4.6 (totální diferenciál) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Říkáme, že f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineální zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ takové, že*

$$\lim_{h \to (0, \ldots, 0)} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{|h|}.$$

V takovém případě nazýváme zobrazení L totálním diferenciálem (derivací) funkce f v bodě a (značíme $df(a)$, $f'(a)$, $D_f(a)$).

Definice 4.7 (gradient funkce) *Nechť f má všechny parciální 1. řádu v bodě $a \in \mathbb{R}^d$. Gradient funkce f v bodě a definujeme jako*

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix}.$$

Věta 4.8 (tvar totálního diferenciálu) *Má-li f totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ potom f má všechny parciální 1. řádu v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ a platí*

$$df(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i.$$

Věta 4.9 (totální diferenciál a spojitost) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Má-li f v bodě a totální diferenciál, potom je v bodě a spojitá.*

Věta 4.10 (o střední hodnotě (přírůstku) funkce více proměnných) *Nechť $I = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_d, \beta_d)$, $a, b \in I$ a nechť $f : I \to \mathbb{R}$ má ve všech bodech I vlastní všechny parciální derivace 1. řádu. Potom existují $c^1, \dots, c^d \in I$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c^i)(b_i - a_i).$$

Věta 4.11 (parciální derivace a totální diferenciál) *Nechť f má všechny parciální derivace 1. řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^d$, potom*

1. *jsou-li všechny parciální derivace 1. řádu omezené na okolí bodu a, potom je f spojitá v bodě a,*
2. *jsou-li všechny parciální derivace 1. řádu spojité v bodě a, potom f má v bodě a totální diferenciál.*

4.1 Zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^m$

Limitu a spojitost zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^m$ definujeme (formálně) stejně, jako u funkcí více proměnných. Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^d$ a $F : M \to \mathbb{R}^m$. Pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U(a, \varepsilon) \subset M$, pak říkáme, že F má v bodě a limitu A, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : y \in P(a, \delta) \implies F(y) \in U(A, \varepsilon),$$

v takovém případě píšeme $\lim_{x \to a} F(x) = A$, Říkáme, že F je spojité v bodě a, pokud $\lim_{x \to a} F(x) = A$.

Definice 4.12 (derivace zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^m$) *Říkáme, že zobrazení F má v bodě a derivaci (totální diferenciál), pokud existuje lineální zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ takové, že*

$$\lim_{h \to (0, \dots, 0)} \frac{|F(a + h) - F(a) - L(h)|}{|h|}$$

V takovém případě nazýváme zobrazení L derivací (totálním diferenciálem) zobrazení F v bodě a (značíme $df(a)$, $f'(a)$, $D_f(a)$).

Definice 4.13 (Jacobiho matice) *Nechť $F = (F_1, \ldots, F_m)$ je zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^m$. Nechť $F_1, \ldots, F_m$ mají všechny parciální 1. řádu v bodě $a \in \mathbb{R}^d$. Jacobiho maticí zobrazení F v bodě a definujeme jako*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix}.$$

Věta 4.14 (tvar derivace zobrazení) *Má-li F derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ potom*

$$F'(a)(h) = J_f(a) \cdot h.$$

Věta 4.15 (derivace složeného zobrazení) *Nechť $F = (F_1, \ldots, F_m)$ je zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^m$ a $G = (G_1, \ldots, G_k)$ je zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^k$. Nechť $a \in \mathbb{R}^d$ nechť existují $F'(a)$ a $G'(F(a))$. Potom $(G \circ F)'(a)$ existuje a platí $(G \circ F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a)$.*

4.2 Extrémy funkcí více proměnných

Definice 4.16 (lokální extrémy funkcí více proměnných) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $M \subset G$. Říkáme, že f má v bodě a lokální minimum (vzhledem k M) pokud existuje $r > 0$, že pro všechna $x \in U(a, r)$ ($x \in U(a, r) \cap M$) platí $f(a) \leq f(x)$. Analogicky definujeme lokální maximum (vzhledem k M) a ostré lokální maximum/minimum (vzhledem k M).*

Věta 4.17 (nutná podmínka pro lokální extrém) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $a \in G$, $i \in \{1, \ldots, d\}$. Pokud má f v bodě a lokální extrém a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Definice 4.18 (parciální derivace vyšších řádů) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Parciální defivaci 2. řádu funkce f v bodě a vzhledem k i-té a následně j-té souřadnice definujeme jako*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a),$$

pokud existuje a značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \text{pro } i \neq i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \quad \text{pro } i = i.$$

Partiální derivace vyšších řádů definujeme analogicky.

Symbolem $C^k(G)$, $k \in \mathbb{N}$, budeme značit množinu všech funkcí (zobrazení) definovaných na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^d$, které mají spojité všecny parciální derivace ktého řádu.

Definice 4.19 (Hessova matice) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in C^2(G)$, $a \in G$. Hessovu matici funkce f v bodě a definujeme jako*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(a) \end{pmatrix}$$

Věta 4.20 (postačující podmínka pro lokální extrém) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in C^2(G)$, $a \in G$. Nechť navíc $\nabla f(a) = 0$, potom:*

- *je-li $H_f(a)$ pozitivně definitní, potom má f v a lokální minimum,*
- *je-li $H_f(a)$ negativně definitní, potom má f v a lokální maximum,*
- *je-li $H_f(a)$ indefinitní, potom f v a nemá lokální extrém.*

Věta 4.21 (o implicitní funkci) *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{d+m}$, $F : G \to \mathbb{R}^m$, $F \in C^k(G)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in G \subset \mathbb{R}^{d+m}$. Předpokládejme, že $F(a, b) = 0$*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{d+1}}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial x_{d+2}}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{d+m}}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{d+1}}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial x_{d+2}}(a) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{d+m}}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{d+1}}(a) & \frac{\partial F_m}{\partial x_{d+2}}(a) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{d+m}}(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ taková, že pro každé $x \in U(a, \delta)$ existuje právě jedno $y \in U(b, \Delta)$ takové, že $F(x, y) = 0$. Navíc, označíme-li jako φ zobrazení přiřazující bodu $x \in U(a, \delta)$ bod $y \in U(b, \Delta)$ jako výše, je toto zobrazení $C^k(U(a, \delta))$.

Věta 4.22 (o Lagrangeových multiplikátorech) *Nechť $m, d \in \mathbb{N}$, $m < d$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g_1, \dots, g_m : G \to \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$. Položme*

$$M = \{x \in G : g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}.$$

Nechť f má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:

1. *vektory $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a)$ jsou lineárně závislé,*
2. *existují $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(a)$.*

Věta 4.23 (o nabývání globálních extrémů) *Nechť f je spojitá funkce na množině $M \subset \mathbb{R}^d$. Předpokládejme, že M je uzavřená (tedy $\mathbb{R}^d \setminus M$ je otevřená) a omezená (existuje $r > 0$ takové, že $M \subset U(0, r)$). Potom f nabývá globálního minima i globálního maxima vzhledem k M.*

5 Metrické prostory

Definice 5.1 (metrický prostor) *Metrickým prostorem nazýváme dvojici* (M, d)*, kde* M *je množina a* $d : M \times M \to [0, \infty)$ *splňuje pro každá* $x, y, z \in M$ *následující podmínky:*

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Definice 5.2 (okolí v metrickém prostoru) *Nechť* (M, d) *je metrický prostor,* $x \in M$ *a* $\varepsilon > 0$*. Otevřeným okolím (otevřenou koulí) se středem* x *s poloměrem* ε *nazýváme množinu* $U(x, r) = \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$*. Uzavřeným okolím (uzavřenou koulí) se středem* x *s poloměrem* ε *nazýváme množinu* $B(x, r) = \{y \in M : d(x, y) \leq \varepsilon\}$*.*

Definice 5.3 (otevřená a uzavřená množina v metrickém prostoru) *Nechť* (M, d) *je metrický prostor,* $A \subset M$*. Množinu* A *nazveme otevřenou, pokud pro každé* $x \in A$ *existuje* $\varepsilon > 0$*, že* $U(x, \varepsilon) \subset A$*. Množinu* A *nazveme uzavřenou, pokud* $M \setminus A$ *je otevřená.*

Věta 5.4 (vlastnosti otevřených množin) *Nechť* (M, d) *je metrický prostor, potom:*

1. *množiny* $\varnothing$ *a* M *jsou otevřené,*
2. *průnik konečného systému otevřených množin je otevřená množina,*
3. *sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.*

Věta 5.5 (vlastnosti uzavřených množin) *Nechť* (M, d) *je metrický prostor, potom:*

1. *množiny* $\varnothing$ *a* M *jsou uzavřené,*
2. *sjednocení konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina,*
3. *průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

Definice 5.6 (vnitřek a uzávěr množiny) *Nechť* (M, d) *je metrický prostor,* $A \subset M$*. Vnitřkem množiny* A *(značíme* A°*) nazýváme sjednocení všech otevřených podmnožin* A*. Uzávěrem množiny* A *(značíme* $\overline{A}$*) nazýváme průnik všech uzavřených nadmnožin* A*.*

Definice 5.7 (limita posloupnosti v metrickém prostoru) *Nechť* (M, d) *je metrický prostor. Říkáme, že posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *prvků* M *má limitu* $x \in M$ *(značíme* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*), pokud platí* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$*.*

Věta 5.8 (charakterizace uzavřených množin) *Nechť (M,d) je metrický prostor, $A \subset M$, protom platí:*

$$(A \text{ je uzavřená}) \iff \Big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A, \lim_{n\to\infty} x_n = x \implies x \in A\Big).$$

Definice 5.9 (spojitá zobrazení mezi metrickými prostory) *Nechť (M,d) a (X,ρ) jsou metrické prostory, $f: M \to X$, $K \subset M$. Říkáme, že f je spojité v bodě $a \in M$ (spojité v bodě $a \in K$ vzhledem ke K), pokud platí následující výrok*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x \in U_d(a,\delta) \implies f(x) \in U_\rho(f(a),\varepsilon).$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x \in U_d(a,\delta) \cap K \implies f(x) \in U_\rho(f(a),\varepsilon)).$$

Říkáme, že f je spojité (spojité na K) pokud je spojité ve všech bodech množíny M (spojité vzhledem ke K ve všech bodech množiny K).

Věta 5.10 (charakterizace spojitých zobrazení) *Nechť (M,d) a (X,ρ) jsou metrické prostory a $f: M \to X$ zobrazení potom jsou následející tvrzení ekvivalentní:*

1. *f je spojité*
2. *$f^{-1}(U)$ je otevřená pro každou $U \subseteq X$ otrevřenou*
3. *$f^{-1}(K)$ je uzavřená pro každou $K \subseteq X$ uzavřenou*

Definice 5.11 (kompaktní množina/prostor) *Nechť (M,d) je metrický prostor. Množinu $K \subset M$ nazveme kompaktní v (M,d) pokud pro každou posloupnost $\{x_n\}$ existuje její vybraná podposloupnost mající limitu v K. Prostor (M,d) nazveme kompaktní pokud je množina M kompaktní v (M,d).*

Věta 5.12 (uzavřená podmnožina kompaktní množiny) *Nechť (M,d) je metrický prostor, $K \subset M$ kompaktní, $A \subset K$ uzavřená. Potom A je kompaktní.*

Věta 5.13 (kompaktní množiny jsou uzavřené) *Nechť (M,d) je metrický prostor, $K \subset M$ kompaktní. Potom K je uzavřená.*

Věta 5.14 (charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^d$) *Množina $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní v $\mathbb{R}^d$ (s eukliedovskou metrikou) právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

Věta 5.15 (extrémy na kompaktních množinách) *Nechť (M,d) je metrický prostor, $K \subset M$ kompaktní a neprázdná, $f: M \to \mathbb{R}$ spojité na K. Potom f nabývá na K globálního maxima i globálního minima.*