1 Číselné obory, základní vlastnosti reálných čísel

Definice 1.1 (těleso) *Uspořádaná pětice* $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *se nazývá těleso, pokud* T *je množina,* $0 \neq 1$ *prvky* T *a* $+$ *a* $\cdot$ *operace na* T *takové, že pro všechna* $x, y, z \in T$ *platí:*

1. $x + y = y + x$ *(komutativita +)*
2. $x \cdot y = y \cdot x$ *(komutativita ·)*
3. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(asociativita +)*
4. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(asociativita ·)*
5. $x + 0 = x$ *(neutralita 0 vzhledem k +)*
6. $x \cdot 1 = x$ *(neutralita 1 vzhledem k ·)*
7. *existuje* $-x \in T$ *pro které platí* $x + (-x) = 0$ *(existence inverzního prvku pro +)*
8. *pokud* $x \neq 0$*, potom existuje* $x^{-1} \in T$*, pro které platí* $x \cdot x^{-1} = 1$ *(existence inverzního prvku vzhledem k ·)*
9. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ *(distributivita)*

Příklad 1.2 *Tělesy jsou například* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{C}$ *s obyklými operacemi* $+$ *a* $\cdot$ *a také* $\mathbb{Z}_p$ *se sčítáním a násobením modulo* p *pro* p *prvočíslo. Snadno ověříme, že v každém tělese platí* $0 \cdot x = 0$.

Věta 1.3 *Platí* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(ve smyslu, že neexistuje* $q \in \mathbb{Q}$ *splňující* $q^2 = 2$*).*

Definice 1.4 (uspořádání) *Relaci* $<$ *na množině* M *nazveme striktním úplným uspořádáním na* M*, pokud pro každé* $x, y, z \in M$ *platí*

1. $x < y$, $x > y$ *nebo* $x = y$,
2. *pokud* $x < y$ *a* $y < z$*, potom* $x < z$,
3. *neplatí* $x < x$.

Definice 1.5 (uspořádané těleso) *Šestici* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$*, kde* $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *je těleso a* $<$ *je uspořádání na* T*, nazveme uspořádaným tělesem, pokud pro všechna* $x, y, z \in T$ *platí*

1. *pokud* $x < y$*, potom* $x + z < y + z$,
2. *pokud* $x < y$ *a* $z > 0$*, potom* $x \cdot z < y \cdot z$.

Definice 1.6 (omezená množina, sup, inf) *Nechť* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$*, kde* $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *je uspořádané těleso. Množina* $A \subset T$ *se nazývá*

1. *shora omezená, pokud eistuje $x \in T$ takové, že pro každé $y \in A$ platí $y \leq x$, každé takové x pak nazýváme horní závorou množiny A,*

2. *shora omezená, pokud eistuje $x \in T$ takové, že pro každé $y \in A$ platí $y \geq x$, každé takové x pak nazýváme dolní závorou množiny A.*

Prvek $x \in T$ nazýváme

1. *supremem množiny $A \subset T$ (značíme $x = \sup A$), pokud neexistuje žádné y horní závora A takové, že $y < x$,*

2. *infimem množiny $A \subset T$ (značíme $x = \inf A$), pokud neexistuje žádné y dolní závora A takové, že $y < x$,*

Věta 1.7 (o zavedení reálných čísel) *Existuje uspořádané těleso, kde každá neprázdná shora omezená množina má supremum. Toto těleso je těmito vlastnostmi v jistém smyslu (až na izomorfismus) určeno jednoznačně.*

(Bez důkazu)

Věta 1.8 (Archimedova vlastnost $\mathbb{R}$) *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > x$.*

Věta 1.9 (o existenci infima) *Každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.*

Věta 1.10 (hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$) *Pro každá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existuje $p \in \mathbb{Q}$ takové, že platí $a < p < b$. Zároveň existuje $p \in \mathbb{Q}$ takové, že platí $a < p < b$.*

Věta 1.11 (o existenci n-té odmocniny) *Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, a $n \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, takové, že $x^n = a$.*

2 Posloupnosti reálných čísel

Definice 2.1 (posloupnost reálných čísel) *Posloupností reálných čísel myslíme zobrazení (nazvěme je třeba a) z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$. Místo $a(n)$ píšeme obvykle a_n, celá posloupnost se pak zpravidla značí $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Definice 2.2 (vlastní limita posloupnosti) *Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $L \in \mathbb{R}$ (zkráceně píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$), pokud platí následující:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies |a_n - L| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Definice 2.3 (omezená posloupnost) *Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme shora (zdola) omezenou, pokud existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že platí $a_n \leq C$ ($a_n \geq C$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme omezenou, pokud je shora i zdola omezená.*

Věta 2.4 (jednoznačnost vlastní limity posloupnosti) *Každá posloupnost má nejvýše jednu vlastní limitu.*

Věta 2.5 (konvergentní posloupnost je omezená) *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Věta 2.6 (aritmetika limit) *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti a nechť platí limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Potom*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = AB$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, *pokud $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.*

Věta 2.7 (věta o dvou strážnících) *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti a nechť platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. Předpokládejme, že existuje $m \in \mathbb{N}$, že $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq m$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.*

Definice 2.8 (rozšířená reálná osa) *Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme rozšířenou reálnou osou. Pro prvky $+\infty$ a $-\infty$ navíc předpokládáme následující vlastnosti:*

1. *pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $-\infty < x < +\infty$,*
2. $|\pm\infty| = +\infty$,
3. $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$, $-\infty \cdot (+\infty) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$,
4. *pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $-\infty + x = -\infty$ a $+\infty + x = +\infty$,*
5. *pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí, pokud $x > 0$ potom $\pm\infty \cdot x = \pm\infty$, pokud $x < 0$ $\pm\infty \cdot x = \mp\infty$,*
6. *pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\frac{x}{\pm\infty} = 0$.*

Poznamenejme, že tzv. neurčité výrazy $-\infty + (+\infty)$, $+\infty + (-\infty)$, $\frac{x}{0}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\frac{\pm\infty}{+\infty}$, $\frac{\pm\infty}{-\infty}$, $0 \cdot \pm\infty$ a $\pm\infty \cdot 0$ nejsou definovány.

Definice 2.9 (nevlastní limita posloupnosti) *Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má (nevlastní) limitu $+\infty$ (resp. $-\infty$) (zkráceně opět píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), pokud platí následující:*

$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies a_n \geq C \ \ (\textit{resp. } a_n \leq C). \tag{2.2}$$

Věta 2.10 (do $\pm\infty$ jdoucí posloupnost je zdola/shora omezená) *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) potom je $\{a_n\}$ zdola (resp. shora) omezená.*

Věta 2.11 (omezená posloupnost krát/lomeno jdoucí k $0/\pm\infty$) *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti, nechť* a_n *je omezená. Pokud platí* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, *potom* $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$. *Obdobně, pokud platí* $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ *a* $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, *potom* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Definice 2.12 (monotonní posloupnost) *Říkáme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je*

- *nerostoucí, pokud* $a_n \geq a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,
- *neklesající, pokud* $a_n \leq a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,
- *klesající, pokud* $a_n > a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,
- *rostoucí, pokud* $a_n < a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,
- *monotonní, pokud splňuje alespoň jednu z podmínek uvedených výše.*

Věta 2.13 (limita monotonní posloupnosti) *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotonní posloupnost, potom* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *existuje.*

Věta 2.14 (aritmetika limit v $\overline{\mathbb{R}}$) *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti a nechť platí limity* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. *Potom*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = AB$,
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, *pokud* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$,

má-li příslušná pravá strana smysl.

Věta 2.15 (aritmetika limit - dělení nulou) *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost pro kterou platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a nechť existuje* $m \in \mathbb{N}$ *takové, že* $a_n > 0$ *kdykoliv* $n \geq m$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Definice 2.16 (vybraná posloupnost) *Říkáme, že posloupnost* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost (podposloupnost) posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *pokud existuje rostoucí posloupnost* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *splňující* $b_k = a_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Věta 2.17 (limita vybrané posloupnosti) *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je sposloupnost a* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *její podposloupnost. Pokud* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$, *potom* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

Věta 2.18 (Bolzano-Weierstrassova) *Každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost.*

Věta 2.19 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro posloupnosti) *Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu právě tehdy když platí následující*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : n, k \geq m \implies |a_n - a_k| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Definice 2.20 (nevlastní supremum a infimum) *Pro $A \subset \mathbb{R}$ definujeme*

$$\sup M = \max\{x \in \overline{\mathbb{R}} : \textit{pro všechna } y \in M \textit{ platí } y \leq x\}$$

a

$$\inf M = \min\{x \in \overline{\mathbb{R}} : \textit{pro všechna } y \in M \textit{ platí } y \geq x\}$$

Poznámka 2.21 *Není-li M shora omezená, potom $\sup M = +\infty$, není-li M zdola omezená, potom $\inf M = -\infty$ a je-li $M = \emptyset$, potom $\inf M = +\infty$ a $\sup M = -\infty$. Ve všech ostatních případech se $\sup M$ a $\inf M$ shodují s hodnotami uvedenými v Definici* **??**.

Definice 2.22 (hromadná hodnota, limes superior/inferior) *Říkáme, že $A \in \mathbb{R}$ je hromadnou hodnotou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pokud existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ mající limitu A.*

Největší hromadnou hodnotu nazývýme limes superior (značíme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$), nejmenší pak limes inferior (značíme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$).

Věta 2.23 (existence limes superior/inferior) *Pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ existují $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, navíc platí*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}$$

a

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\}.$$

3 Řady

Definice 3.1 ((částečný) součet řady) *Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $n \in \mathbb{N}$ definujeme s_n n-tý částečný součet nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ formulí $s_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$. Existuje-li limita $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, nazýváme s součtem nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a říkáme, že nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. V opačném případě říkáme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Věta 3.2 (nutná podmínka konvergence řady) *Pokud nekonečná řada* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje, potom* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta 3.3 (linearita nekonečných řad) *Buď* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a předpokládejme, že řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují. Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ *konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3.1 Řady s nezápornými členy

Poznámka 3.4 *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s nezápornými členy (tj.* $a_n > 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*), limita* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *vždy existuje - buď konečná, nebo* $+\infty$ *- proto často píšeme* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ *pokud řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ *pokud řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta 3.5 (srovnávající kritérium) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a předpokládejme, že existuje* $m \in \mathbb{N}$ *takové, že* $a_n \geq b_n$, $n \geq m$. *Potom*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Věta 3.6 (limitní srovnávající kritérium) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a předpokládejme, že existuje limita* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in C \in \overline{\mathbb{R}}$. *Potom*

1. *pokud* $C \neq 0$ *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
2. *pokud* $C \neq \infty$ *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Věta 3.7 (odmocninové kritérium) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Položme* $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Potom*

1. *pokud* $L < 1$ *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $L > 1$ *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Věta 3.8 (podílové kritérium) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Položme* $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *a* $l = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1. *pokud* $L < 1$ *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $l > 1$ *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

3.2 Alternující řady

Definice 3.9 (absolutní konvergence) *Říkáme, že nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pokud platí* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Věta 3.10 (konvergence a absolutní konvergence) *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, potom konverguje.*

Věta 3.11 (Leibnizovo kritérium) *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost a nechť platí* $\liminf_{n\to\infty} = 0$. *Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Definice 3.12 (Součin řad) *Pro řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *definujeme řadu*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} b_k \right)$$

a nazýváme ji součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 3.13 *Nechť řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují absolutně, potom*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}b_k\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right).$$

4 Funkce jedné reálné proměnné

4.1 Spojitost a limita

Definice 4.1 (okolí a prstencové okolí) *Pro* $a \in \mathbb{R}$ *a* $\varepsilon > 0$ *definujeme množiny*

$$P(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\setminus\{a\}, \quad P_-(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a), \quad P_+(a,\varepsilon) = (a, a+\varepsilon),$$

a nazýváme je prstencové okolí bodu a, resp. levé a pravé prstencové okolí bodu a. Zároveň definujeme množiny

$$U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \quad U_-(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a], \quad U_+(a,\varepsilon) = [a, a+\varepsilon),$$

a nazýváme je okolí bodu a, resp. levé a pravé okolí bodu a.

Definice 4.2 (limita a spojitost funkce) *Nechť* f *je reálná funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$. *Říkáme, že* f *má v bodě* a *limitu* $L \in \mathbb{R}$ *(píšeme* $\lim_{x\to a} f(x) = L$*), pokud platí následující*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in P(a,\delta) \implies f(x) \in U(L,\varepsilon).$$

Nechť f *je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$. *Říkáme, že* f *je spojitá v bodě* a, *pokud* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, *tj. pokud platí následující výrok:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in P(a,\delta) \implies f(x) \in U(f(a),\varepsilon\varepsilon).$$

Definice 4.3 (jednostranná limita a spojitost funkce) *Nechť* f *je reálná funkce definovaná na nějakém levém, resp. pravém, prstencovém okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$. *Říkáme, že* f *má v bodě* a *jednostranou limitu* $L \in \mathbb{R}$ *zleva, resp. zprava, (píšeme* $\lim_{x\to a_-} f(x) = L$, *resp.* $\lim_{x\to a_+} f(x) = L$ *), pokud platí následující*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in P_-(a,\delta) \implies f(x) \in U(L,\varepsilon),$$

resp.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in P_+(a,\delta) \implies f(x) \in U(L,\varepsilon).$$

Nechť f *je reálná funkce definovaná na nějakém levém, resp. pravém, okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$. *Říkáme, že* f *je zleva, resp. zprava, spojitá v bodě* a, *pokud* $\lim_{x\to a_-} f(x) = f(a)$, *resp.* $\lim_{x\to a_+} f(x) = f(a)$, *tj. pokud platí následující výroky:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in P_-(a,\delta) \implies f(a) \in U(L,\varepsilon),$$

resp.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0;: x \in P_+(a,\delta) \implies f(a) \in U(L,\varepsilon).$$

Definice 4.4 (nevlastní limita funkce) *Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f má v bodě a limitu $+\infty$, resp. $-\infty$ (píšeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$), pokud platí následující*

$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0;: x \in P(a,\delta) \implies f(x) \geq C,$$

resp.

$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0;: x \in P(a,\delta) \implies f(x) \leq C.$$

Podobně definujeme jednostranné nevlastní limity, zkráceně:

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = +\infty \quad \textit{pokud} \quad \forall C \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0;: x \in P_+(a,\delta) \implies f(x) \geq C,$$

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = -\infty \quad \textit{pokud} \quad \forall C \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0;: x \in P_+(a,\delta) \implies f(x) \leq C,$$

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = +\infty \quad \textit{pokud} \quad \forall C \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0;: x \in P_-(a,\delta) \implies f(x) \geq C,$$

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = -\infty \quad \textit{pokud} \quad \forall C \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0;: x \in P_-(a,\delta) \implies f(x) \leq C,$$

Věta 4.5 (aritmerika limit funkcí) *Bu*

Definice 4.6 (spojitost funkce na intervalu) *Buď f funkce definovaná na intervalu I s koncovými body $a < b$. Říkáme, že f je spojitá na I pokud platí následující:*

1. *f spojitá ve všech vnitřních bodech I,*
2. *pokud I obsahuje a, potom f je zprava spojitá v a,*
3. *pokud I obsahuje b, potom f je zleva spojitá v b.*

Věta 4.7 (Darbouxova vlastnost) *Buď f spojitá funkce na intervalu $[a,b]$, $f(a) < f(b)$ a $c \in (f(a), f(b))$. Potom existuje $x \in (a,b)$ splňující $f(x) = c$.*

Definice 4.8 (maximum a minimum funkce) *Buď f funkce definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}$. Definujeme*

1. *supremum funkce f na množině M jako $\sup\limits_M f = \sup\{f(x) : x \in M\}$,*
2. *infimum funkce f na množině M jako $\inf\limits_M f = \inf\{f(x) : x \in M\}$,*
3. *maximum funkce f na množině M jako $\max\limits_M f = \sup\{f(x) : x \in M\}$ (pokud maximum existuje),*
4. *minimum funkce f na množině M jako $\min\limits_M f = \min\{f(x) : x \in M\}$ (pokud maximum existuje).*

Pokud $\max_M f$, resp. $\min_M f$ existuje, říkáme, že f nabývá maxima, resp. minima, na M.

Definice 4.9 (omezená funkce) *Říkáme, že funkce f definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}$ je shora, resp. zdola omezená, pokud platí $\sup\limits_M f < \infty$, $\inf\limits_M f > -\infty$. Říkáme, že f je omezená na M, pokud je zároveň omezená shora i zdola.*

Jinými slovy, f je omezená (shora omezená, zdola omezená), pokud množina $f(M)$ je omezená (shora omezená, zdola omezená).

Věta 4.10 (omezenost spojité funkce) *Buď f spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f je omezená na $[a, b]$.*

Věta 4.11 (maximum a minimum spojité funkce) *Buď f spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá maxima i minima na $[a, b]$.*

Definice 4.12 (monotonní funkce) *Říkáme, že f je*

1. *rostoucí na M, pokud pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) < f(y)$,*
2. *neklesající na M, pokud pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) \leq f(y)$,*
3. *klesající na M, pokud pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) > f(y)$,*
4. *nerostoucí na M, pokud pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) \geq f(y)$,*
5. *ryze monotonní na M, pokud je na M rostoucí, nebo klesající $f(x) \geq f(y)$,*
6. *monotonní na M, pokud je na M neklesající, nebo nerostoucí.*