Funkcionály reprezentované integrálem

Budeme uvažovat funkcionál ve tvaru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx,$$

pro nějakou $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a to na množině

$$\{y \in C^1([a,b]) : y(a) = A,\ y(b) = B\},$$

pro nějaká $A, B \in \mathbb{R}$.

Abychom mohli využít naše předchozí poznatky, upravíme si F následovně.

- volme $\chi(x) = \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A$ $\quad [\chi(a) = A,\ \chi(b) = B]$
- uvažujme funkcionál $\Phi(u) = F(u + \chi)$

na množině $\{u \in C^1([a,b]) : u(a) = u(b) = 0\}$

což je podprostor $C^1([a,b])$.

Platí $\quad u$ je bodem minima/maxima Φ

$$\Updownarrow$$

$y = u + \lambda$ je bodem minima/maxima Φ

Poznámky a příklady

(1) Pro $f(x,y,z) = xy^2$ dostáváme $F(y) = \int_a^b xy^2$

$f(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}$ dostáváme $F(y) = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}$

(2) Platí $D_h \Phi(u) = \int_a^b f_y(x,y,y')h + f_z(x,y,y')h'$

$$D^2_{h,h} \Phi(u) = \int_a^b f_{yy}(x,y,y')h^2 + 2f_{yz}(x,y,y')hh' + f_{zz}(x,y,z)(h')^2$$

(řetízkové pravidlo)

Při hledání stacionárních bodů Φ tedy řešíme systém rovnic

$$\boxed{\int_a^b f_y(x,y,y')h + f_z(x,y,y')h' = 0 \qquad h\in C^1([a,b]),\ h(a)=h(b)=0.}$$

Pro (nejen) jeho řešení užijeme následující

L (základní lemma variačního počtu)

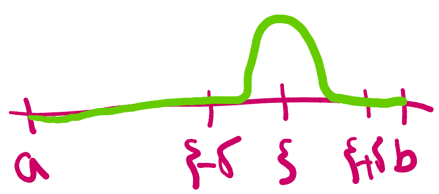
Nechť $f\in C([a,b])$ a $H=\{h\in C^1([a,b]),\ h(a)=h(b)=0\}$.

Potom (1) je-li $\int_a^b fh=0$, $h\in H$, potom $f=0$ na $[a,b]$

(2) je-li $\int_a^b fh'=0$, $h\in H$, potom je f konstantní na $[a,b]$

D: (1) Je-li $f(\xi)>0$ potom $f>0$ na nějakém $(\xi-\delta,\xi+\delta)$

a stačí zvolit $h\in H$



(2) je ekvivalentní s

$\int_a^b fh = 0$ pro každou h splňující $\int h = 0$

volme $h(x) = \int_a^x f - \alpha$, kde $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$

$h(a) = 0 \quad h(b) = \int_a^b f - \alpha \int_a^b 1 = 0$ tedy $h \in H$ a

$$0 = \int_a^b (f-\alpha) f - \underbrace{\int_a^b \alpha (f-\alpha)}_{=0} = \int_a^b (f-\alpha)^2 \Rightarrow f = \alpha \text{ na } [a,b]$$

$\boxed{//}$

D $\cdot \int f_y(x,y,y')h + f_z(x,y,y')h' = 0 \quad G$ PF k $x \to f(x, y(x), y'(x))$

$$0 = [Gh]_a^b - \int_a^b Gh' + \int f_z(x,y,y')h'$$

$$\int_a^b (f_z(x,y,y') - G)h' = 0 \quad h \in H$$

Tedy $\underbrace{f_z(x,y,y')}_{\in C^1} - \underbrace{G}_{\Leftarrow \{\in C^1} = \underbrace{C^{\in \mathbb{R}}}_{\in C^1}$

$$0 = \int_a^b \left(f_y(x,y,y') - \left[f_z(x,y,y') \right]' \right) h$$

Tedy $f_y(x,y,y') - \left[f_z(x,y,y') \right]' = 0$ $\blacksquare$

Pokud je $y \in C^2([a,b])$ potom má E-L rovnice tvar

$$f_y(x,y,y') - f_{zx}(x,y,y') - f_{zy}(x,y,y')y' - f_{zz}(x,y,y')y'' = 0$$

Pokud $f(x,y,z) = g(x,z)$

dostaneme tvar $-\left(f_z(x,y,y') \right)' = 0$

což dává $f_z(x,y,y') = C$

$$f(x,y,z) = \sqrt{1+z^2} \qquad f_z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C \longrightarrow y' = D \to y = K$$

tady jsme skončili

$$\text{prt 1: } \left[g(y) - g(x) \geq \nabla g(x) \cdot (x-y) \iff g \text{ konvexní} \right]$$

$$F(w) - F(y) = \int f(x,w,w') - f(x,y,y')$$

$$\geq \int \left(f_y(x,y,y'), f_z(x,y,y') \right) \cdot \left(y-w, y'-w' \right)$$

$$= \int (y-w) f_y(x,y,y') + (y'-w') f_z(x,y,y')$$

$$= \int (y-w) \left[f_z(x,y,y') \right]' + (y'-w') f_z(x,y,y')$$

$$= \int \left[(y-w) \cdot f_z(x,y,y') \right]' = \left[(y-w) f_z(x,y,y') \right]_a^b = 0 \quad \blacksquare$$

Pro připomenutí

$$D^2_{h,h}\Phi(u) = \int_a^b f_{yy}(x,y,y')h^2 + \underline{2f_{yz}(x,y,y')hh'} + f_{zz}(x,y,y')(h')^2$$

$$\int_a^b f_{yz}(x,y,y')(h^2)' = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\left[f_{yz}(x,y,y')h^2\right]_a^b}} - \int_a^b \left[f_{yz}(x,y,y')\right]' h^2$$

$$D^2_{h,h}\Phi(u) = \int_a^b \Big[\underbrace{f_{yy}(x,y,y') - \left[f_{yz}(x,y,y')\right]'}_{P(x)}\Big]h^2 + \underbrace{f_{zz}(x,y,y')}_{Q(x)}(h')^2$$