Přednáška 5.11.

středa 4. listopadu 2020 13:30

Tvrzení, která budeme využívat:

- $f' > 0$ na (α, β) $\Rightarrow$ f rostoucí na (α, β)
- $f' < 0$ na (α, β) $\Rightarrow$ f klesající na (α, β)
- $f' = 0$ na (α, β) $\Rightarrow$ f konstantní na (α, β)
- $f' > 0$ na (α, β) nebo $f' < 0$ na (α, β), potom $f^{-1}(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$ $\quad a \in (\alpha, \beta)$.

Věta (o jednoznačnosti exponenciály)

Existuje nejvýše jedna funkce $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

(E1) $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y \quad x, y \in \mathbb{R}$,

(E2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$.

Než větu dokážeme, odvodíme si ještě pár dalších vlastností:

$$\exp(0)=\exp(0+0)\overset{(E1)}{=}\exp(0)\cdot\exp(0)=(\exp(0))^2$$

Tedy $\exp(0)$ je rovno 0, nebo 1. Pokud $\exp(0)=0$,

potom $\exp(x)=\exp(x+0)\overset{(E1)}{=}\exp(x)\cdot\exp(0)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

Potom ale $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x}\neq 1$ (neexistuje).

(spor s (E2))

Tedy dostáváme

$$(E3)\quad \exp(0)=1$$

Dále $1\overset{(E3)}{=}\exp(0)=\exp(x-x)\overset{(E1)}{=}\exp(x)\cdot\exp(-x)\quad x\in\mathbb{R}$.

Tedy platí
$$(E4)\quad \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}\quad x\in\mathbb{R}$$
$$(E5)\quad \exp(x)\neq 0\quad x\in\mathbb{R}$$

(1) $\exp(x)=\exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)\overset{(E1)}{=}\left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geq 0$

(1) a (E5) $\Rightarrow$ (E6) $\exp(x)>0\quad x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\exp(x)-\exp(a)}{x-a}\overset{(E4)\text{ a }(E1)}{=}\exp(a)\lim_{x\to a}\frac{\exp(x-a)-1}{x-a}\overset{(E2)}{\underset{\text{VOLSF}}{=}}1$$

Tedy platí (E7) $(\exp x)'=\exp x$.

D: (věty o jednoznačnosti)

Nechť existují dvě funkce $\exp, \mathrm{Exp}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující (E1) a (E2). Pak obě rovněž splňují (E3)–(E7). Tedy můžeme počítat

$$\left(\frac{\mathrm{Exp}(x)}{\exp(x)}\right)' = \frac{(\mathrm{Exp}(x))' \cdot \exp(x) - \mathrm{Exp}(x) \cdot (\exp(x))'}{(\exp(x))^2}$$

definováno pro $x \in \mathbb{R}$ podle (E5)

$$= \frac{\mathrm{Exp}(x) \cdot \exp(x) - \mathrm{Exp}(x) \cdot \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

Tedy podle ● existuje $C \in \mathbb{R}$, že $\frac{\mathrm{Exp}(x)}{\exp(x)} = C$, $x \in \mathbb{R}$.

Podle (E3) máme $\frac{\mathrm{Exp}(0)}{\exp(0)} = \frac{1}{1} = 1$ a tedy $C = 1$ ☒

Dále (E7) $\Rightarrow$ (E8) $(\exp(x))^{(n)} = \exp(x)$ $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

(E7), (E5) a ● $\Rightarrow$ (E9) exp je rostoucí na $\mathbb{R}$

(E2) $\Rightarrow$ (E10) exp je spojitá na $\mathbb{R}$

(E9) $\Rightarrow$ (E11) exp je prostá

(E12) obor hodnot exp je $(0, \infty)$ (bez důkazu)

(E11) a (E12) $\Rightarrow$ (E13) existuje inverzní funkce k exp, kterou značíme $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Funkce log splňuje (budeme psát e^x místo $\exp(x)$)

(L1) $\log(x\cdot y) = \log x + \log y \qquad x,y \in (0,\infty)$

$$\log(x\cdot y) = \log\left(e^{\log x}\cdot e^{\log y}\right) \overset{(E1)}{=} \log e^{\log x + \log y} = \log x + \log y$$

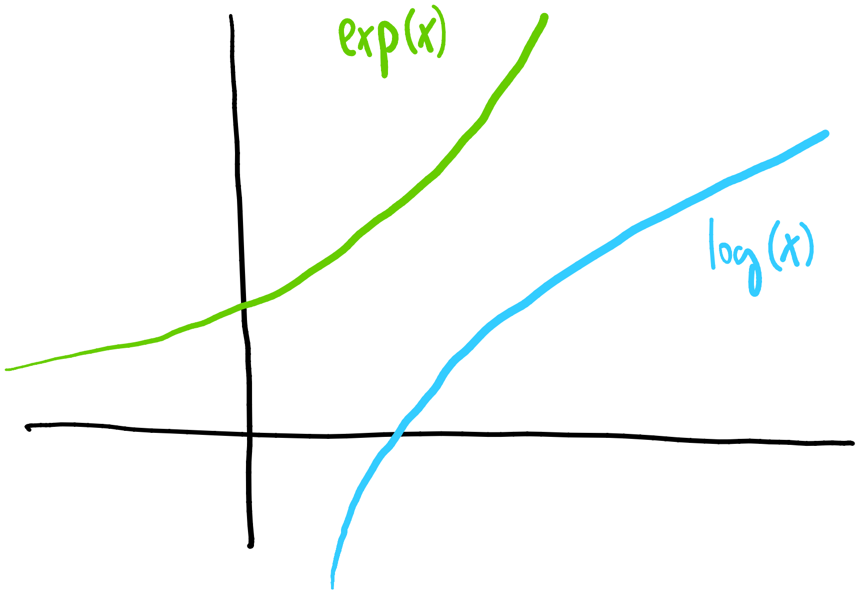
(L2) $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x \qquad x \in (0,\infty)$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = \log\left(\frac{1}{e^{\log x}}\right) \overset{(E4)}{=} \log\left(e^{-\log x}\right) = -\log x$$

(E3) $\Rightarrow$ (L3) $\log(1) = 0$

● $\Rightarrow$ (L4) $(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad x > 0$

(L4) a ● $\Rightarrow$ (L5) log je rostoucí na $(0,\infty)$



Pomocí funkcí e^x a $\log x$ můžeme definovat obecnou mocninu

$$a^b = e^{b\cdot\log a} \qquad a>0 \quad b\in\mathbb{R}.$$

To dává funkce

$$a^x = e^{x\log a} \qquad \text{(obecná exponenciála)}$$

$$x^a = e^{a\log x} \qquad \text{(obecná mocnina)}$$

a můžeme definovat obecný logaritmus jako inverzní funkci k a^x.

Je dobré si uvědomit, že tato definice není ve sporu z předchozím zavedením x^n a $x^{\frac{1}{n}}$ pro $n\in\mathbb{N}$.

Pro $x>0$ můžeme psát

$$x^n = \underbrace{x\cdot x\cdot x}_{n\text{ krát}} = \underbrace{e^{\log x}\cdot e^{\log x}\cdots e^{\log x}}_{n\text{ krát}} \overset{(E1)}{=} e^{\log x+\log x+\dots+\log x} = e^{n\log x}$$

$$x = e^{\log x} = e^{n\cdot\frac{1}{n}\log x} = e^{\overbrace{\frac{1}{n}\log x+\dots+\frac{1}{n}\log x}^{n\text{ krát}}} \overset{(E1)}{=} \left(e^{\frac{1}{n}\log x}\right)^n$$

Pozor na definiční obor mocnin podle různých definic,

x^n $\quad n\in\mathbb{N}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

$x^{\frac{1}{n}}$ $\quad n$ sudé $\quad x\in[0,\infty)$

$x^{\frac{1}{n}}$ $\quad n$ liché $\quad x\in\mathbb{R}$

x^a podle poslední definice $\quad x\in(0,\infty)$

V: (o jednoznačnosti funkcí sin a cos)

Existuje právě jedna dvojice funkcí $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a konstanta $\pi \in \mathbb{R}$, že platí

(G1) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad x, y \in \mathbb{R}$,

(G2) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad x, y \in \mathbb{R}$,

(G3) $\sin(-x) = -\sin x$ (sin je lichá funkce)

$\cos(-x) = \cos x$ (cos je sudá funkce), $x \in \mathbb{R}$,

(G4) $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$,

(G5) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Axiomy (G1)-(G5) implikují všechny vlastnosti, které očekáváme od funkcí sin a cos. Například

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos 0 + \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin 0 \overset{(G4)}{=} \cos 0$$

(G6) $\cos 0 = 1$

a $$1 = \cos 0 = \cos(x - x) = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) \overset{(G3)}{=} \cos^2 x + \sin^2 x$$

(G7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad x \in \mathbb{R}$.

(G8) $(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = \sin x$

D (věty o jednoznačnosti sin a cos)

Nechť trojice $(\mathrm{Sin}, \mathrm{Cos}, \Pi)$ a $(\sin, \cos, \pi)$ obě splňují (G1)-(G5)

Položme
$$f(x) = \underbrace{(\mathrm{Sin}\,x - \sin x)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(\mathrm{Cos}\,x - \cos x)^2}_{\geq 0}$$

Ukážeme, že $f(x)=0$ $x\in\mathbb{R}$.

$$f'(x) \overset{(G8)}{=} 2(\mathrm{Sin}\,x - \sin x)\cdot(\mathrm{Cos}\,x - \cos x) + 2(\mathrm{Cos}\,x - \cos x)\cdot(-\mathrm{Sin}\,x - (-\sin x)) = 0$$

Tedy podle existuje $C\in\mathbb{R}$, že $f(x)=C$ $x\in\mathbb{R}$.

Protože $f(0) \overset{(G4),(G6)}{=} (0-0)^2 + (1-1)^2 = 0$ je $C=0$

Tedy $\mathrm{Cos}\,x = \cos x$ a $\mathrm{Sin}\,x = \sin x$ $x\in\mathbb{R}$.

Axiom (G4) pak dává $\Pi = \pi$.