D (Gâteauxova a Fréchetova derivace)

Nechť X je NLP, $F: X \supseteq D_f \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Potom

(i) Gâteauxovu derivaci F v bodě a ve směru $h \in X \setminus \{0\}$ definujeme jako
$$D_h F(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t},$$
pokud limita napravo existuje.

(ii) Spojité lineární zobrazení $L: X \to \mathbb{R}$ nazveme Gâteauxovou derivací F v bodě a, pokud $D_h F(a)$ existuje pro všechna $h \in X \setminus \{0\}$ a $L(h) = D_h F(a)$, $h \in X \setminus \{0\}$.

(iii) Spojité lineární zobrazení $L: X \to \mathbb{R}$ nazveme Fréchetovou derivací F v bodě a, pokud platí
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Poznámky a příklady

(1) Pro všechny tyto derivace platí mnoho pravidel, co už známe – jednoznačnost, Fréchet $\Rightarrow$ Gâteaux,

Fréchet $\Rightarrow$ spojitost v a, ...

Fréchetovu derivaci budeme značit F'.

(2) Pro $X = C([0,1])$, $F(f) = f(0)$, platí $D_h F(a) = h(0)$

$F(f) = \int_0^1 f$, platí $D_h F(a) = \int_0^1 h$

$F(f) = \int_0^1 (f)^2$, platí $D_h F(a) = \int_0^1 2fh$

(3) Obecně platí pro $X = C([a,b])$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ a

$\Phi(f) = \int_a^b g(f)$, že $D_h \Phi(f) = \int_a^b g'(f) \cdot h$

$\varphi(t) = \Phi(f+th) \to D_h \Phi(f) = \varphi'(0)$.

$$\left[\Phi(f+th)\right]' = \left[\int_a^b g(f(x)+th(x))\,dx\right]'$$

$$\overset{??}{=} \int_a^b \left[g(f(x)+th(x))\right]' dx$$

$$= \int_a^b g'(f(x)+th(x)) \cdot \underbrace{h(x)}_{=(f(x)+th(x))'}\,dx$$

Tedy $\varphi'(0)=\int_a^b g'(f(x))\,h(x)\,dx$

Formálněji $\frac{1}{t}\left[\varphi(t)-\varphi(0)\right]-\int_a^b g'(f(x))\cdot h(x)\,dx$ (*)

$\int_a^b \frac{1}{t}\Big[\underbrace{g(f(x)+th(x))-g(f(x))}_{g'(f(x)+\xi(x))\cdot t\cdot h(x)}\Big]-g'(f(x))\,h(x)\,dx$ $\quad |\xi(x)|\leq|t\,h(x)|$

$=\int_a^b\left[g'(f(x)+\xi(x))-g'(f(x))\right]h(x)\,dx$ $=: I$

Platí

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in[\alpha,\beta]: |x-y|<\delta \Rightarrow |g'(x)-g'(y)|<\varepsilon.$

Je-li $|t|<\frac{\delta}{\|h\|}$ pak $|\xi(x)|\leq\delta$ a

$|I|\leq\int_a^b \varepsilon\cdot h(x)\leq(b-a)\cdot\|h\|\cdot\varepsilon$

D (stacionární bod)

Je-li X NLP, $F: X \supseteq D_F \to \mathbb{R}$. Potom bod $a \in D_F$ nazýváme stacionárním bodem F, pokud $D_h F(a) = 0$, $h \in X \setminus \{0\}$.

Poznámky a příklady

(1) Platí - pokud je a bodem extrému F a $D_h F(a)$ existuje, potom $D_h F(a) = 0$. Speciálně, má-li F v bodě extrému a Gâteauxovu/Fréchetovu derivaci L, potom $L \equiv 0$.

(2) Pokud má F v bodě minima a dokonce $D^2_{h,h} F(a)$, potom $D^2_{h,h} F(a) \geq 0$.

$\varphi(t) = F(a+th)$ a $\varphi''(0) = D^2_{h,h} F(a) < 0$, potom $\varphi(t) - \varphi(0) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\varphi'(0)}}t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + o(t^2)$

záporné pro malá t

(3) Pokud je a stacionárním bodem F

a existuje $\delta > 0$, že

$$D^2_{h,h}F(x) \geq 0, \quad x \in U(a,\delta),\ h \in X \setminus \{0\}$$

Potom má F v bodě a minimum.

tady jsme skončili :c

Funkcionály reprezentované integrálem

Budeme uvažovat $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $A, B \in \mathbb{R}$

a $F : C^1([a,b]) \to \mathbb{R}$,

$$F(y)=\int_a^b f(x,y(x),y'(x))\,dx$$

a hledat extrémy F vzhledem k množině

$$\{y\in C^1([a,b]) : y(a)=A,\ y(b)=B\}.$$

Položme $\chi(x)=A+\frac{B-A}{b-a}(x-a)$

a definujme $\Phi : C^1([a,b])\to\mathbb{R}$ jako

$$\Phi(u)=F(u+\chi).$$

Budeme vyšetřovat extrémy Φ omezeného

na podprostor

lineární

$$M=\{y\in C^1([a,b]),\ y(a)=y(b)=0\}.$$

Poznámky a příklady

(1) pro $f(x,y,z)=\sqrt{1+z^2}$ dostaneme

$$F(y)=\int \sqrt{1+(y')^2}$$

(2) Platí $\quad y=u+K$

$$D_h\Phi(u)=\int_a^b f_y(x,y,y')h+f_z(x,y,y')h'$$

$$D^2_{h,h}\Phi(u)=\int_a^b f_{yy}(x,y,y')h^2+2f_{yz}(x,y,y')hh' + f_{zz}(x,y,y')(h')^2$$

(řetízkové pravidlo)

V (Euler-Lagrangeova rovnice)

Nechť y je stacionárním bodem funkcionálu Φ, potom funkce

$$x \to f_z(x, y(x), y'(x))$$

leží v $C^1([a,b])$ a platí

$$0 = f_y(x, y(x), y'(x)) + \left[f_z(x, y(x), y'(x))\right]'$$

↑ Euler-Lagrangeova rovnice.

L (základní lemma variačního počtu)

Nechť $f \in C([a,b])$, potom

(i) pokud $\int fg' = 0$, $g \in C^1([a,b])$, $g(a) = g(b) = 0$

potom je f konstantní na $[a,b]$

(ii) pokud $\int fg = 0$, $g \in C^1([a,b])$, $g(a) = g(b) = 0$,

potom $f = 0$ na $[a,b]$.