Přednáška 30.11.

neděle 29. listopadu 2020 23:25

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{x\cdot\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}} = e^x \qquad x\neq 0$$

$\exp(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. To má význam úročení částky A na stále menších a menších úsecích.

$$A\cdot(1+x),\quad A\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right),\quad A\cdot\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)$$

$$A\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12},\quad A\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365}.$$

V limitě pak dostáváme něco jako spojité rovnoměrné úročení.

(5) (geometrická posloupnost)

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} +\infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ 0 & -1\ q<1 \end{cases} \qquad \text{(podle } q^x\text{)}$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$

(7) analogicky k monotonním funkcím definujeme monotónní posloupnosti:

$$\{a_n\} \text{ je } \left.\begin{array}{l}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\\ \text{neklesající}\\ \text{nerostoucí}\end{array}\right\} \text{ pokud } \left\{\begin{array}{l} a_n < a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \\ a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1}\end{array}\right\} n \in \mathbb{N}$$

D: (omezená posloupnost)

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme shora (zdola) omezenou, pokud existuje $C \in \mathbb{R}$, že $a_n \leq C$ $(a_n \geq C)$, $n \in \mathbb{N}$.

V (limita monotónní posloupnosti)

(1) každá monotónní posloupnost má limitu.

(2) každá neklesající shora omezená (nerostoucí zdola omezená) posloupnost konverguje.

D: (2) Položme $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$, volme $\varepsilon > 0$. Potom ex. $N \in \mathbb{N}$, že $a_N > L - \varepsilon$. Pro $n \geq N$ pak platí

$L + \varepsilon > L \geq a_n \geq a_N > L - \varepsilon$ a tedy $a_n \in U(L, \varepsilon)$

(1) $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je neomezená, tedy pro každé $\varepsilon > 0$ ex. $N \in \mathbb{N}$, že $a_N > \frac{1}{\varepsilon}$

Př. (Fibonacciho posloupnost)

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n > 1$, $a_1 = a_2 = 1$, $\{a_n\}$ rostoucí a kladná, tedy má limitu $L > 0$. Zároveň aritmetika limit dává

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n + a_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = 2L$$

a tedy $L = +\infty$.

D (vybraná posloupnost)

Říkáme, že $\{b_k\}$ je vybraná posloupnost (podposloupnost) z posloupnosti $\{a_n\}$, pokud existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel n_k, že $b_k = a_{n_k}$.

(1) a_{2n}, a_{2n-1} (sudé/liché členy posloupnosti)

(2) n_k jako v definici, potom $n_k \geq k$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ neexistuje pro $q \leq -1$

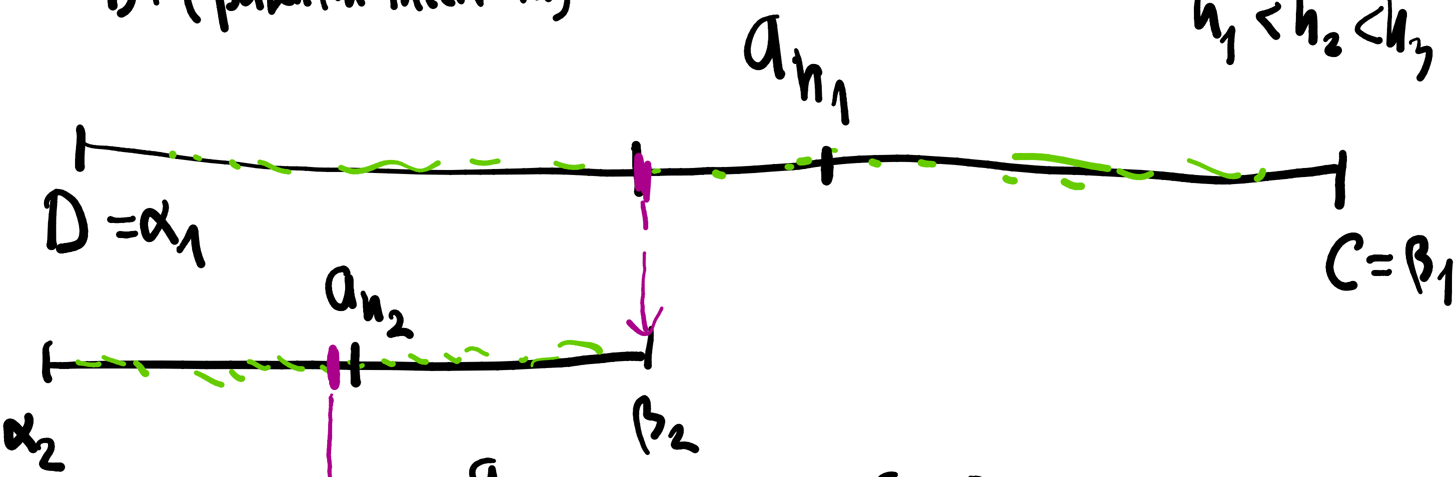
$\lim\limits_{n\to\infty} q^{2n} \geq 1$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^{2n-1} \leq -1$

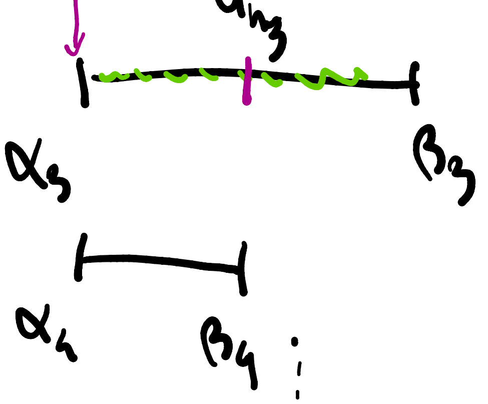
V (Bolzano-Weierstrass)

Každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost.

D: (půlením intervalů)

$n_1 < n_2 < n_3$





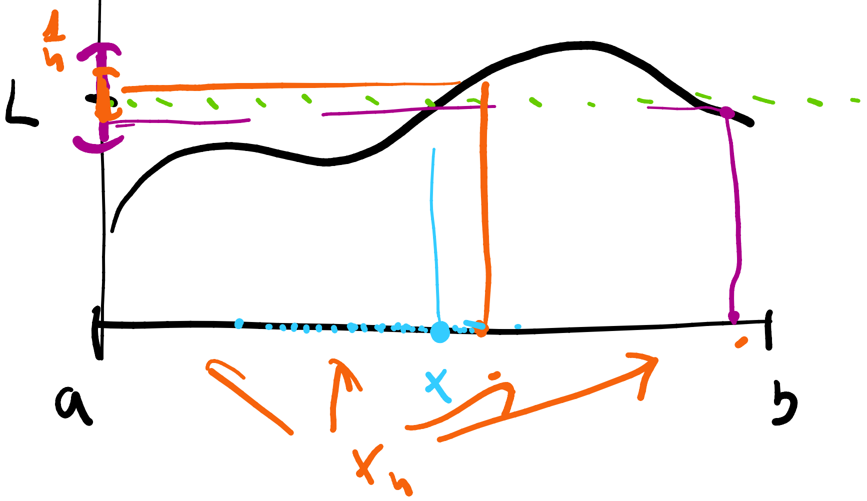
$\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ monotónní omezené

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = A \quad \lim_{k\to\infty} \beta_k = B \quad \in \mathbb{R}$$

$$A - B = \lim \beta_k - \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot (D-C) = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k \rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A \quad \text{(stráž.)} \quad \square$$

$f(x) = L$ $\qquad$ $f(x_{n_k}) \to L = f(x)$



V (Heineho) Nechť f je definována na $P(a,\Delta)$,

Potom je ekvivalentní:

(1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

(2) pro každou $\{a_n\} \subseteq D_f \setminus \{a\}$, $a_n \to a$, platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Volme $\varepsilon > 0$. Potom

- $\exists \delta > 0 \ \forall x \in P(a,\delta): f(x) \in U(L,\varepsilon)$
- $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N: a_n \in U(a,\delta) = P(a,\delta)$

$a_n \in P(a,\delta) \Rightarrow f(a_n) \in U(L,\varepsilon)$

$(2) \Rightarrow (1)$ $\quad [\neg(1) \Rightarrow \neg(2)]$

$\neg(1)$: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in P(a, \delta) : f(x) \notin U(L, \varepsilon)$

pro $\delta_n = \frac{1}{n}$ dostávám $a_n \in P(a, \frac{1}{n})$, $f(a_n) \notin U(L, \varepsilon)$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $\{a_n\} \subseteq D_f \setminus \{a\}$, $\quad \neg\left(\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L\right) = \neg(2)$

$\blacksquare$