Přednáška 2.11.

sobota 31. října 2020 16:59

V (derivace složené funkce)

Nechť existují $f'(a)$ a $g'(f(a))$. Potom existuje $(g\circ f)'(a)$ a platí $(g\circ f)'(a) = f'(a)\cdot g'(f(a))$ $\quad ((g\circ f)' = f'\cdot g'\circ f)$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \nearrow g'(f(a)) \qquad\qquad \nearrow f'(a)$$

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \begin{cases} \dfrac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & f(x)\neq f(a) \\[2ex] g'(f(a))\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 & f(x)=f(a) \end{cases}$$

D: Položme

$$Q(t) = \begin{cases} \dfrac{g(t)-g(f(a))}{t-f(a)} & t\neq f(a) \\[2ex] g'(f(a)) & t = f(a) \end{cases}$$

Pak Q je spojitá v $f(a)$ a platí

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = Q(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Tedy

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} Q(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim Q(f(x)) \lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(f(a))\cdot f'(a)$$

$$= \lim_{x \to a} Q(f(x)) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

$\boxed{\text{\\\\}}$

$$1 = (x)' = \left(e^{\log x}\right)' = (\log x)' \cdot e^{\log x} = (\log x)' \cdot x$$

Tedy pokud $(\log x)'$ existuje, potom $(\log x)' = \frac{1}{x}$

Tuto úvahu můžeme použít obecně:

$$1 = (x)' = f(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))',$$

což dává $\quad (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$,

ale jen pokud $(f^{-1})'(x)$ existuje.

V (derivace inverzní funkce - varianta 1)

Nechť $f : (\alpha, \beta) \xrightarrow{\text{na}} (\gamma, \delta)$ je prostá, $a \in (\alpha, \beta)$. Pokud

(i) $f'(a)$ existuje a $f'(a) \neq 0$,

(ii) f^{-1} je spojitá v $f(a)$.

Potom $f^{-1\prime}(f(a))$ existuje a $f^{-1\prime}(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$

(... pro $y = f(a)$ $\quad f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{\ldots}$)

(alternativně pro $x=f(a)$ $\quad (f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$)

D: Položme

$$Q(t)=\begin{cases}\dfrac{t-a}{f(t)-f(a)} & f(t)\neq f(a),\\[2mm] \dfrac{1}{f'(a)} & f(t)=f(a).\end{cases}$$

Potom Q je spojitá v a, navíc platí

Tedy $\lim\limits_{t\to f(a)} Q(f^{-1}(t)) = Q(a) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

VOLSF $\quad$ (ii) $\quad f^{-1}(f(a))=a$

$$\lim_{t\to f(a)} Q(f^{-1}(t)) = \lim_{t\to f(a)} \frac{f^{-1}(t)-a}{t-f(a)} = \lim_{t\to f(a)} \frac{f^{-1}(t)-f^{-1}(f(a))}{t-f(a)}$$

$$= (f^{-1})'(f(a)) \qquad \boxtimes$$

Def: Funkce je na intervalu I

- rostoucí $\quad$ pokud $\quad f(x)<f(y)$ $\quad x,y\in I,\ x<y$,
- neklesající $\quad$ —"— $\quad f(x)\leq f(y)$ $\quad$ —"—,

- neklesající — || — $f(x) \geq f(y)$ — '' — ,
- klesající — || — $f(x) > f(y)$ — || ———,
- nerostoucí — || — $f(x) \geq f(y)$ — || ———.

- monotonní, pokud platí jedno z výše uvedených
- ryze monotonní, pokud je rostoucí nebo klesající.

V: (derivace a monotonie)

Pokud f' existuje ve všech bodech intervalu I, potom

$f' > 0$ na I $\Rightarrow$ f je rostoucí na I,

$f' \geq 0$ na I $\Rightarrow$ f je neklesající na I,

$f' < 0$ na I $\Rightarrow$ f je klesající na I,

$f' \leq 0$ na I $\Rightarrow$ f je nerostoucí na I.

V: (derivace inverzní funkce - verze 2)

Nechť f je spojitá a rostoucí na (α, β), $a \in (\alpha, \beta)$, $f'(a)$ existuje a $f'(a) \neq 0$. Potom $(f^{-1})'(f(a))$ existuje a

$$f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

V: (derivace inverzní funkce - verze 3)

Nechť $f' > 0$ na (α, β), nebo $f' < 0$ na (α, β) a $a \in (\alpha, \beta)$. Potom $(f^{-1})'(f(a))$ existuje a a $a \in (\alpha, \beta)$. Potom $(f^{-1})'(f(a))$ existuje a

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} .$$

Def: (derivace vyšších řádů)

Druhou derivaci funkce f v bodě a definujeme jako hodnota

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

pokud limita napravo existuje.

Analogicky definujeme derivace vyšších řádů $\left(f^{(n)} = (f^{(n-1)})'\right)$.

V (Leibnizův vzorec)

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad (f^{(0)} = f)$$

D: (indukcí)

$$n = 1 \quad (fg)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)}$$

Indukční krok

Indukční krok

$$(f\cdot g)^{(n+1)} = \left((f\cdot g)^{(n)}\right)'$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

$$= f^{(0)} g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g^{(0)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}$$

$m=k$

$m=k+1$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} f^{(m)} g^{(n-m+1)} + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} f^{(m)} g^{(n-m+1)}$$

$$= f^{(0)} g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g^{(0)}$$

$$+ \sum^{n} \left[\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}\right] f^{(m)} g^{(n-m+1)}$$

$$+\sum_{m=1}\left[\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}\right] f^{(m)} g^{(n+1-m)}$$

$$\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}$$

$$=\binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}+\binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)}$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\binom{n+1}{m} f^{(m)} g^{(n+1-m)}$$

$$=\sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m} f^{(m)} g^{(n+1-m)} \qquad \blacksquare$$