Přednáška 29.10.

pátek 30. října 2020 2:05

**Def** (derivace funkce)

Derivaci funkce $f$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ definujeme jako hodnotu

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud daná limita existuje.

Podobně definujeme i derivace zleva resp. zprava, jako

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ resp. } f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**Poznámky a příklady**

(1) Platí $\left(f'(a) = L\right) \Leftrightarrow \left(\left(f'_-(a) = L\right) \wedge \left(f'_+(a) = L\right)\right)$.

(2) • Pro $f(x) = x$ počítáme limitu $\lim\limits_{x \to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$

a tedy $f'(x) = 1 \quad x \in \mathbb{R}$

• Pro $f(x) = x^2$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2 - a}{x - a} = 2a$ (víme z dřívějška)

tedy $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

• Obdobně (pomocí rozvečku $a^n - b^n$) spočítáme

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

• Pro $f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x > 0$

$$\lim \frac{x^\alpha - a^\alpha}{} = \lim a^\alpha \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{a^\alpha}{a}\cdot\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{\frac{x}{a}-1}$$

$$= a^{\alpha-1}\lim_{x\to a}\frac{e^{\alpha\log\frac{x}{a}}-1}{\alpha\log\frac{x}{a}}\cdot\alpha\cdot\frac{\log\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}$$

$$\overset{?}{=} \alpha a^{\alpha-1}\lim_{x\to a}\frac{e^{\alpha\log\frac{x}{a}}-1}{\alpha\log\frac{x}{a}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\log\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}$$

$$= \alpha a^{\alpha-1}.$$

Tedy $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad x>0.$

- Pro $f(x) = \sin x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin a\cdot\cos h + \cos a\cdot\sin h - \sin a}{h}$$

$$\overset{?}{=} \sin a\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h^2}\cdot\lim_{h\to 0} h + \cos a\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 + \cos a\cdot 1 = \cos a.$$

Tedy $f'(x) = \cos x \quad x\in\mathbb{R}.$

- Pro $f(x) = e^x$ $\quad \lim_{x\to a}\frac{e^x - e^a}{x-a} = e^a\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}$

$$= e^a\cdot 1 = e^a.$$

(3) Obvykle používáme (nepřesný) zápis typu

(3) Obvykle používáme (nepřesný) zápis typu

$$(x)' = 1, \ (x^2)' = 2x, \ (\sin x)' = \cos x, \ (e^x)' = e^x$$

L: (derivace a spojitost)

Pokud existuje $f'(a)$ (vlastní), potom $f$ je spojitá v $a$.

D:
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) - f(a) + f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)$$

$$\overset{?}{=} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a) \qquad \boxtimes$$

V: (o derivaci $f+g$, $f \cdot g$ a $\frac{f}{g}$)

Platí (1) $(f+g)' = f' + g'$,

(2) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$,

kdykoliv má pravá strana smysl.

D:

(1) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\quad}{x-a} \qquad \lim_{x\to a} \frac{\quad}{x-a} \qquad \lim_{x\to a} \frac{\quad}{x-a}$$

$$= f'(a) + g'(a) .$$

(2) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(x)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{f(a)\, g(x) - f(a)\, g(a)}{x-a}$$

$$\overset{?}{=} \lim_{x\to a} g(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

$g$ je spojitá podle lemmatu

t - na přednášce nebylo

(3) Nejprve ukážeme $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)\cdot g(a)} \cdot \frac{g(a)-g(x)}{x-a}$$

$$\overset{?}{=} \frac{1}{g(a)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} \cdot \left( - \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right)$$

$$= \frac{g'(a)}{g^2(a)} .$$

Podle (2) pak dostáváme

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$

pro úplnost -

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'$$
$$= \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \boxed{\text{Q}}$$

V (o derivaci složené funkce)

Pokud existují $f'(a)$ a $g'(f(a))$, potom existuje i $(f\circ g)'(a) = f'(a)\cdot g'(f(a))$.

D: (příště)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot \cos x - (\sin x)\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(\text{využili jsme } (\cos x)' = -\sin x\right)$$

$e^{-x} = g\circ f(x)$ pro $g(x) = e^x$ $f(x) = -x$

$g'(x) = e^x$, $f'(x) = -1$ a tedy

$(e^{-x})' = (-1)\cdot e^{-x} = -e^{-x}$.

Def: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{\ldots}$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{\ldots}$

Definujeme $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Potom $(\sinh x)' = \cosh x$ a $(\cosh x)' = \sinh x$

(bylo na rozmyšlenou).