Přednáška 26.10.

sobota 24. října 2020 23:02

V: (o limitě složené funkce)

Nechť $\lim_{x\to A} f(x)=B$ a $\lim_{x\to B} g(x)=C$. Pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:

(S) g je spojitá v bodě B,

(P) $\exists \xi>0\ \forall x\in P(A,\xi): f(x)\neq B$.

Potom $\lim_{x\to A} g\circ f(x)=C$.

D: Volme $\varepsilon>0$, potom

$$\left(\lim_{x\to B} g(x)=C\right) \Rightarrow \exists \delta>0\ \forall x\in P(B,\delta): g(x)\in U(C,\varepsilon)$$

$$\left(\lim_{x\to A} f(x)=B\right) \Rightarrow \exists \gamma>0\ \forall x\in P(A,\gamma): f(x)\in U(B,\delta)$$

Pokud $x\in P(A,\gamma)$ a platí (S), potom

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)\neq B: & f(x)\in P(B,\delta) \\ f(x)=B: & (S)\Rightarrow f(x)\in P(B,\delta) \end{array}\right\} g(f(x))\in U(C,\varepsilon)$$

Pokud platí (P) a $x\in P(A,\gamma)\cap P(A,\xi)$, pak $f(x)\in P(B,\delta)$ a $g(f(x))\in U(C,\varepsilon)$. $\boxtimes$

Př: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1$,

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}$, kde $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

Důsledek: Je-li f spojitá v a a g spojitá v $f(a)$, potom $g\circ f$ je spojitá v a.

Důsledek: Jestli f spojitá v a a g spojitá v $f(a)$,
potom $g \circ f$ je spojitá v a.

Tzv. známé limity:

kromě $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ještě $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Z těchto limit pak odvodíme další tzv. známé limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}$$

cos je spojitý
viz také níže

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1 \quad \left(\text{alternativně } \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1\right)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{e^{\log x} - 1} = 1,$$

Protože $\lim \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow \lim \frac{x}{e^x - 1}$

Protože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cdots}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cdots}{e^x-1}$

a pak už stačí použít VOLSF pro:

$$f(x)=\log x,\ g(x)=\frac{x}{e^x-1},\ A=1,\ B=0,\ C=1.$$

Platí podmínka (P) protože $x\in P(1,1)\Rightarrow \log(x)\neq 0$.

Podobně dokážeme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

(o těchto budeme ještě mluvit, ale zkuste si to rozmyslet sami)

Těchto šest limit budete moci u početní zkouškové písemky používat bez odůvodnění. Totéž platí pro fakt, že elementární funkce jsou spojité (případně zleva/zprava) na svých definičních oborech.

Def: (jednostranná okolí)

Pro $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ definujeme

$U_-(a,\delta) = (a-\delta, a]$, $U_+(a,\delta) = [a, a+\delta)$ levé/pravé okolí,

$P_\pm(a,\delta) = U_\pm(a,\delta) \setminus \{a\}$ levé/pravé prstencové okolí.

Def: (jednostranná spojitost a limita)

Říkáme, že f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá zleva, resp. zprava, pokud platí $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_-(a,\delta) : f(x) \in U(f(a), \varepsilon)$

resp. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_+(a,\delta) : f(x) \in U(f(a), \varepsilon)$

Říkáme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $L \in \mathbb{R}$ zleva, resp. zprava ($\lim_{x \to a-} f(x) = L$, resp. $\lim_{x \to a+} f(x) = L$), pokud

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(a,\delta) : f(x) \in U(L, \varepsilon)$

resp. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a,\delta) : f(x) \in U(L, \varepsilon)$.

Poznámky a příklady:

(1) pro jednostranné limity zpravidla platí stejná pravidla, jako pro obyčejné limity (poznámky (1)-(4), aritmetika limit).

(2) platí

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = L\right) \Leftrightarrow \left(\left(\lim_{x \to a+} f(x) = L\right) \wedge \left(\lim_{x \to a-} f(x) = L\right)\right).$$

Podobně: f je spojitá v bodě a právě tehdy, když je v a spojitá zleva i zprava.

(3) Pro funkci $sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ platí

$\lim\limits_{x \to 0+} sgn(x) = 1, \ \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1.$

Problém často nastává ve výrazech obsahujících $\frac{|x|}{x}$ ap.

viz následující příklad:

(4) $$\lim_{x \to 0\pm} \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x} = \lim_{x \to 0\pm} \frac{|x| \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \pm 1.$$