Přednáška 25.10.
pondělí 25. října 2021 9:06

(6) (Moore-Osgoodova věta)

$f_n \rightrightarrows f$ na $P(a,r)$ a existují $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n \in \mathbb{R}$

Potom existují $\lim_{n\to\infty} L_n$ a $\lim_{x\to a} f(x)$ a rovnají se

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall x\in P(a,r)\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq N: |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall x\in P(a,r)\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq N: |L_n-L_m|<\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
existuje limita $\lim_{n\to\infty} L_n = L$

Dodefinujme f_n na $U(a,r)$ v bodě a hodnotami L_n.

Dodefinujme f hodnotou L v a.

Potom jsou f_n spojité na $U(a,r)$ a $f_n \rightrightarrows f$

Tedy f je spojitá na $U(a,r)$ a speciálně platí $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

(7) (konvergence na kompaktech)

Platí $\left(f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } U\right) \Leftrightarrow \forall K\subseteq U$ kompaktní: $f_n \rightrightarrows f$ na K

(8) obdobně definujeme i bodovou/stejnoměrnou konvergenci řad funkcí: $\sum f_n \rightrightarrows$, pokud konvergují stejnoměrně její částečné součty

(9) (mocninné řady) $\sum a_n z^n$ s poloměrem konvergence R.

Protom pro $|z| \leq \rho < R$ platí

$$\left|S_m(z) - S_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rho^k = \alpha_{n+1} \to 0$$

Tedy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konverguje stejnoměrně na $U(a, \rho)$

a tedy lokálně stejnoměrně na $U(a, R)$

(10) (nutná podmínka konvergence řad)

Pokud $\sum f_n \rightrightarrows$, potom $f_n \rightrightarrows 0$

$f_n = S_{n+1} - S_n$ + B-C podmínka

(11) (Weierstrassův M-test)

Pokud $|f_n| \leq \alpha_n$ na A pro nějaká $\{\alpha_n\}$

splňující $\sum \alpha_n < \infty$. Potom $\sum f_n \rightrightarrows$ na A.

$$|S_m - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = a_{n+1} \to 0 \quad + \text{B-C}$$

(12) $\sum \frac{\sin nx}{n^2} \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

co $\sum \frac{\sin nx}{n}$? (víme, že konvergují bodově)

D (stejná omezenost a monotonní posloupnosti funkcí)

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ($\mathbb{C}$). Potom řekneme, že $\{f_n\}$ je stejně omezená na A, pokud existuje $C \in \mathbb{R}$, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in A: |f_n(x)| \leq C.$$

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ je monotónní, pokud platí

neklesající $\forall x \in A\ \forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, nebo

nerostoucí $\forall x \in A\ \forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

V (Abel-Dirichlet)

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti (reálných či komplexních) funkcí definovaných na množině $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ($\mathbb{C}$), přičemž $\{a_n\}$ je monotónní na A. Nechť navíc platí alespoň jedna z podmínek

- (Dirichlet) $a_n \rightrightarrows 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$ je stejně omezená (obojí na A)
- (Abel) posloupnost $\{a_n\}$ je stejně omezená a $\sum b_n \rightrightarrows$ (obojí na A)

Potom $\sum a_n b_n \rightrightarrows$ na A.

Poznámky a příklady

(1) pro $b_n = (-1)^n$ dostáváme Leibnizovo kritérium

(2) $$\sum_{n=0}^{N} \sin nx + i\cos nx = \left|\sum_{n=0}^{N} (e^{ix})^n\right| = \frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}$$

$1-\cos x - i\sin x$

omezené na $[\delta, 2\pi-\delta]$

Tedy $\sum \frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows$ a $\sum \frac{\cos nx}{n} \rightrightarrows$ na $[\delta, 2\pi-\delta]$

(3) (Abelova věta)

Označme $f(x) = \sum a_n x^n$, $x \in (0,R)$

a nechť $\sum a_n R^n = S$. Potom $\lim_{x\to R^-} f(x) = S$.

D: máme $a_n x^n = \underbrace{a_n R^n}_{b_n} \cdot \underbrace{\frac{x^n}{R^n}}_{a_n}$

Potom $\{a_n\}$ je monotónní a stejně omezená na $[0,R]$

a $\sum b_n \rightrightarrows$ na $[0,R]$ (nezávisí na x)

Tedy $\sum a_n x^n \rightrightarrows$ na $[0,R]$. Navíc jsou její částečné součty spojité a tedy je funkce

$\tilde{f}(x) = \sum a_n x^n$ $x \in [0,R]$ spojitá, což implikuje

$$\lim_{x\to R^-} f(x) = \lim_{x\to R} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(R) = S$$