Přednáška 23.11.

středa 25. listopadu 2020 1:57

D (okolí $\pm\infty$) Pro $\varepsilon > 0$ definujeme okolí a prstencové okolí $\pm\infty$ (s parametrem ε) jako

$$U(+\infty, \varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right) = P(+\infty, \varepsilon)$$

a

$$U(-\infty, \varepsilon) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) = P(-\infty, \varepsilon)$$

D (limita funkce - plná verze)

Pro $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ říkáme, že funkce f má v bodě a limitu L (zn. $\lim_{x \to a} f(x) = L$), pokud platí

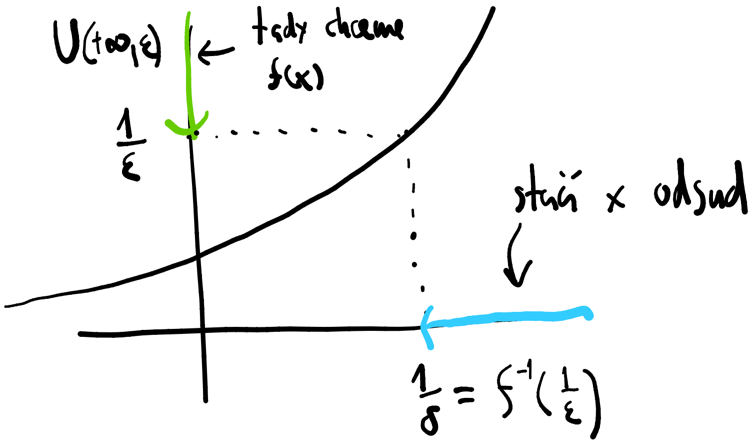
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P(a, \varepsilon) : f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme jednostranné limity.

Poznámky a příklady

(1) I po tomto rozšíření (o nevlastní body) stále platí většina poznatků, které už o limitách známe (především jednoznačnost limity a limita složené funkce). O aritmetice limit a dvou strážnících budeme ještě mluvit.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$



využijeme, že je $\exp: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0,+\infty)$ rostoucí

Podobně $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \log x = -\infty$.

Pro následující větu si nejprve uvedeme značení

$$\lim_{x\to a} L^{\pm} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in P(a,\delta): f(x)\in P_{\pm}(L,\varepsilon)$$

V (výpočet nevlastních limit)

Platí (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0^{\pm}$

(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to a^{\pm}} f\left(\frac{1}{x}\right)$

D: (1)

Předně: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in P(a,\delta): f(x)\in U(\pm\infty,\varepsilon)$

Pak už si jen stačí uvědomit, že

$$f(x)\in U(+\infty,\varepsilon) \iff f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \iff 0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \iff \frac{1}{f(x)} \in P_+(0,\varepsilon)$$

Podobně pro $-\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in P(+\infty,\delta): f(x)\in U(L,\varepsilon)$

Podobně jako v předchozí části

$$x\in P(+\infty,\delta) \iff x>\frac{1}{\delta} \iff 0<\frac{1}{x}<\delta \iff \frac{1}{x}\in P_+(0,\delta)$$

a stačí ve formuli $\frac{1}{x}$ za t ∎

V (o jednom strážníkovi)

Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ a $g \gtrless f$ na $P(a,\Delta)$.

Potom $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$.

$\Delta>\delta>0$ vždy můžeme volit

D: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in P(a,\delta): f(x)\in U(+\infty,\varepsilon)$

Pro taková x: $\frac{1}{\varepsilon}<f(x)<g(x)$ a tedy $g(x)\in U(+\infty,\varepsilon)$

Podobně pro $-\infty$. ∎

V (nekonečno a omezenost)

Platí:

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ a $g \gtrless C$ na $P(a,\Delta)$,

potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)=\pm\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ a $g > C > 0$ na $P(a, \Delta)$,

potom $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ a $g < C < 0$ na $P(a, \Delta)$,

potom $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \mp\infty$.

D: (1) Snadno si rozmyslíme, že

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall D \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) > D - C$$

můžeme volit $\Delta > \delta > 0$

$\Updownarrow$

$f(x) + C > D$

Tedy $\lim\limits_{x \to a} f(x) + C = +\infty$ a stačí použít jednoho strážníka protože $f(x) + g(x) > f(x) + C$. Podobně pro $-\infty$.

(2) $$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \iff \forall D \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) > \frac{D}{C}$$

$\Delta > \delta > 0$

$\Updownarrow$

$f(x) \cdot C > D$

A opět stačí použít strážníka.

Zbytek analogicky.

D (rozšířená reálná osa)

Množina $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme rozšířenou reálnou osou, obvyklé operace rozšiřujeme jako

(1) $-\infty < x < +\infty \quad x \in \mathbb{R}$

(2) $|\pm\infty| = +\infty$

(3) $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$, $\pm\infty \cdot (\pm\infty) = +\infty$
$\pm\infty \cdot (\mp\infty) = -\infty$

(4) $\pm\infty + x = x + \pm\infty = \pm\infty$, $x \in \mathbb{R}$

(5) $x > 0$, potom $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot x = \pm\infty$
$x < 0$, potom $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot x = \mp\infty$, $x \in \mathbb{R}$

(6) $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0$, $x \in \mathbb{R}$

V (aritmetika limit - plná verze)

Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ $\quad (a, A, B \in \mathbb{R}^*)$

potom:

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$,

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,

$$(3)\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B},$$

pokud má odpovídající výraz napravo smysl.

D: (nebyl, ale všechno už vlastně víme)

Na počítání limit které dávají tzv. neurčité výrazy budeme používat následující (nechvalně známou) metodu

V (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť platí $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, nebo $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$.

Pokud $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, potom $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Př: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

l'Hospital   l'Hospital

Pozor: l'Hospitalovo pravidlo používáme odzadu.