L: (limita a omezenost) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = L$, potom

(1) $\exists C>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in P(a,\delta): |f(x)| < C$

(2) pokud $L \neq 0$, pak $\exists D>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in P(a,\delta): \frac{1}{|f(x)|} < D$

D: (1) platí $\exists \delta>0\ \forall x \in P(a,\delta): |f(x)-L| < 1$

tedy $|f(x)| \leq |f(x)-L| + |L| < 1 + |L|,\ x\in P(a,\delta)$

(2) platí $\exists \delta>0\ \forall x\in P(a,\delta): |f(x)-L| < \frac{|L|}{2}$

tedy $|L| \leq |L-f(x)| + |f(x)| < \frac{|L|}{2} + |f(x)| \quad x \in P(a,\delta)$

což dává $\frac{|L|}{2} < |f(x)|$ a $\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|L|} \quad x\in P(a,\delta)$ $\boxed{\text{N}}$

V: (aritmetika limit - verze 1)

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, potom

(1) $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = A+B$,

(2) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$,

(3) pokud $B\neq 0$, pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

D: volme $\varepsilon>0$, pak

$\exists \delta_1>0\ \forall x\in P(a,\delta_1): |f(x)-A| < \varepsilon$

$\exists \delta_2>0\ \forall x\in P(a,\delta_2): |g(x)-B| < \varepsilon$

$\exists C>0\ \exists \delta_3>0\ \forall x\in P(a,\delta_3): |g(x)| < C$

Potom pro $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ a $x\in P(a,\delta)$ platí

$|f(x)+g(x)-(A+B)| \leq |f(x)-A| + |g(x)-B| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon \quad (\Rightarrow (1))$

$|f(x)\cdot g(x) - A\cdot B| \leq |f(x)\cdot g(x) - A\cdot g(x)| + |A\cdot g(x) - A\cdot B|$

$$|f(x)\cdot g(x) - A\cdot B| \leq |f(x)\cdot g(x) - A\cdot g(x)| + |A\cdot g(x) - A\cdot B|$$
$$\leq |g(x)|\cdot|f(x)-A| + |A|\cdot|g(x)-B|$$
$$< C\cdot\varepsilon + |A|\cdot\varepsilon = (C+|A|)\varepsilon \qquad (\Rightarrow 2)$$

Pro důkaz (3) předpokládejme $B\neq 0$, to dává

$\exists D>0\ \exists \delta_4>0\ \forall x\in P(a,\delta_4): \frac{1}{|g(x)|} < D.$

Položme $\bar{\delta} = \min\{\delta, \delta_4\}$. Podle (2) stačí $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{|g(x)|} = \frac{1}{B}$.

Pro $x\in P(a,\bar{\delta})$: $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{1}{|g(x)|\cdot|B|}\cdot|B-g(x)| < \frac{D}{|B|}\cdot\varepsilon$ ☒

Úmluva: U výrazů typu $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f\circ g$ budeme vždy (mlčky) předpokládat definiční obor tak, aby výraz dával smysl.

Např.

<u>Důsledek:</u> Jsou-li funkce f, g spojité v a potom jsou i funkce $f+g$, $f\cdot g$ spojité v a. Je-li navíc $g(a)\neq 0$ pak je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v a.

<u>Příklad:</u> Nechť P a Q jsou polynomy,

potom $$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(a)}{P(a)},$$

pokud a není kořenem polynomu Q. Speciálně, (racionální) funkce $\frac{P}{Q}$ je spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}$ mimo kořeny Q.

mimo kořeny Q.

Co kdybychom chtěli spočítat limitu $\lim_{x\to 0} x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$.

Jde o součin funkcí, ale aritmetiku limit nemůžeme použít.

V: (o dvou strážnících).

Předpokládejme, že pro $a, L \in \mathbb{R}$ a funkce f, g, h platí:

(1) $\exists \bar{\delta} > 0\ \forall x \in P(a,\bar{\delta}): g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$.

Potom $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

D: Volme $\varepsilon > 0$, potom

$\exists \delta_1 > 0\ \forall x \in P(a,\delta_1): L - g(x) < \varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0\ \forall x \in P(a,\delta_2): h(x) - L < \varepsilon$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \bar{\delta}\} > 0$ platí

$$L - \varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \varepsilon \quad x \in P(a,\delta)$$

tedy $L - f(x) \le \varepsilon$, $f(x) - L < \varepsilon$ a $|f(x) - L| < \varepsilon$ ∎

Př: Teď už snadno limitu $\lim_{x\to 0} x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$ spočítáme,

protože $-x^2 \le x^2\cdot\sin\frac{1}{x} \le x^2 \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

a $\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$. Tedy $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$.

Později si ukážeme, že $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ (a ještě později

Později si ukážeme, že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (a ještě později si ukážeme, že funkce sin existuje). Co kdybychom teď chtěli spočítat limitu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}$, kde $f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$?

Věta: (limita složené funkce)

Nechť $\lim\limits_{x\to A} f(x)=B$ a $\lim\limits_{x\to B} g(x)=C$.

Pokud platí alespoň jedno z podmínek

(S) g je spojitá v B

(P) $\exists \alpha>0\ \forall x\in P(a,\alpha): f(x)\neq A$

Potom $\lim\limits_{x\to A} g\circ f(x)=C$.

D: Volme $\varepsilon>0$. Potom platí

(*) $\exists \delta>0\ \forall x\in P(B,\delta): g(x)\in U(C,\varepsilon)$

(**) $\exists \gamma>0\ \forall y\in P(A,\gamma): f(y)\in U(B,\delta)$

Volme $y\in P(A,\gamma)$, potom $f(y)\in U(B,\delta)$

$f(y)\neq B \overset{(*)}{\Rightarrow} g(f(y))\in U(C,\varepsilon)$

(S) $\Rightarrow f(y)=B \Rightarrow g(f(y))\in U(C,\varepsilon)$

Předpokládejme nyní (P). Volme $y\in P(A,\beta)$, kde $\beta=\min\{\gamma,\alpha\}$. Potom

(P) $\Rightarrow f(y)\neq B \overset{(*)}{\Rightarrow} g(f(y))\in U(C,\varepsilon)$ $\square$

Bude příště

$(P) \Rightarrow \quad f(y) \neq B \Rightarrow$