D (bodová a stejnoměrná konvergence)

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^d (\mathbb{C})$ a nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (reálných či komplexních) funkcí definovaných na A a $f: A \to \mathbb{R} (\mathbb{C})$. Potom říkáme, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k f na množině A:

(1) bodově (zn. $f_n \to f$), pokud pro každé $x \in A$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

(2) stejnoměrně (zn. $f_n \rightrightarrows f$), pokud platí

(✱) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in A\ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

(3) lokálně stejnoměrně (zn. $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$), pokud

$f_n \rightrightarrows f$ na K pro každou $K \subseteq A$ kompaktní.

Poznámky a příklady

(1) bodovou konvergenci můžeme vyjádřit výrokem

(✱) $\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Výroky (✱) a (✱) se liší pouze pořadím kvantifikátorů.

(2) $(f_n \rightrightarrows f) \Rightarrow (f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f) \Rightarrow (f_n \to f)$

$\qquad\qquad \not\Leftarrow \qquad\qquad\qquad \not\Leftarrow$

(3) (lokálně) stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá:

nechť $f_n \rightrightarrows f$, f spojité, volme $a \in A$ a $\varepsilon > 0$

Potom pro $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ platí

(*) $|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$

Volme $N \in \mathbb{N}$ aby pro $n \geq N$ $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $z \in A$

$\delta > 0$ aby pro $|z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Pak pro $|x-a| < \delta$ a za použití $n \geq N$ v (*)

dostaneme $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(4) pro $\{f_n\} \subseteq C([a,b])$, $f \in C([a,b])$ platí

$$(f_n \rightrightarrows f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

(5) pro stejnoměrnou (a bodovou) konvergenci můžeme rovněž definovat cauchyovskost posloupnosti pomocí výroku

$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Z úplnosti prostoru $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) a poznámek (3) a (4) pak dostáváme, že prostor $C([a,b])$ je úplný.

(6) analogicky definujeme stejnoměrnou/bodovou konvergenci řady funkcí $\sum f_n$ jako stejnoměrnou/bodovou konvergenci posloupnosti částečných součtů

(7) položme $\sigma_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$, potom

$$\left(f_n \rightrightarrows f\right) \iff \left(\sigma_n \to 0\right)$$

Např.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad f_n \to 0$$

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{n} \quad (\text{bod maxima})$$

Potom $\sigma_n = \left|f_n\left(\pm\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2} \not\to 0$.

Tedy $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$ (nebo $(0,\infty)$).
Ale $f_n \rightrightarrows 0$ na intervalech typu (a,∞)
pro $a>0$. Podobně $f \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,\infty)$.