# Abelova věta

$\sum \alpha_n x^n$ má poloměr konvergence $R>0$

$\sum \alpha_n R^n$ konverguje

Položme $a_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$, $b_n(x) = \alpha_n R^n$.

Potom $\{a_n\}$ je monotónní a stejně omezená na $[0,R]$

$\sum b_n \rightrightarrows$ na $[0,R]$ (nezávisí na $x$)

Tedy $\sum \alpha_n x^n = \sum a_n b_n \rightrightarrows$ na $[0,R]$

Navíc má spojité částečné součty, a tedy je funkce

$x \to \sum \alpha_n x^n$ spojitá na $[0,R]$ a platí

$$\sum \alpha_n R^n = \lim_{x \to R^-} \sum \alpha_n x^n .$$

Záměna limity a integrálu

$\{f_n\} \subseteq C([a,b])$, $f_n \rightrightarrows f$, potom $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Tedy

$$\left|(R)\int_a^b f_n - (R)\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq (b-a)\|f_n - f\|$$

a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n = (R)\int_a^b f = (R)\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

V (stejnoměrná konvergence derivací)

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $(a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$. Nechť navíc

- $f_n'$ existuje vlastní na $(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$,
- $f_n' \rightrightarrows f$ na $(a,b)$
- $\{f_n(c)\}$ konverguje pro nějaké $c \in (a,b)$.

Tato věta nž dává záměna limity a $(N)\int$.

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ $\{f_n\} \subseteq N((a,b))$. Volme $c \in (a,b)$.

Položme $F_n(x) = \int_c^x f_n$. Potom $F(c) = 0$ a $F_n' = f_n$

Tedy $F_n \rightrightarrows F$ na $(a,b)$, $F' = f$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \lim_{n\to\infty} \left[F_n\right]_a^b = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{x\to b^-} F_n(x) - \lim_{x\to a^+} F_n(x)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b^-} F_n(x) - \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a^-} F_n(x)$$

varianta M.O.

$$\stackrel{\downarrow}{=} \lim_{x\to b^-} \lim_{n\to\infty} F_n(x) - \lim_{x\to a^+} \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

$$= \left[F(x)\right]_a^b = \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

D: (věty) Pro $n, m \in \mathbb{N}$ platí a $x \in (a,b)$ platí

$$f_n(x) - f_m(x) - [f_n(c) - f_m(c)] = f_n'(\underbrace{\xi}_{\in (a,b)}) - f_m'(\xi)(x-c)$$

Buď $\varepsilon > 0$. Volme $N \in \mathbb{N}$, aby pro $n, m \geq N$ platilo

- $|f_n(c) - f_m(c)| < \varepsilon$
- $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$

Potom $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon + \varepsilon(b-a) = \varepsilon(1+b-a)$

Tedy $f_n \rightrightarrows F$ na $(a,b)$. Volme $x \in (a,b)$ pevně.

Položme $g_n(y) = \dfrac{f_n(y) - f_n(x)}{y-x}$, $g(y) = \dfrac{F(y) - F(x)}{y-x}$

Potom $g_n \rightrightarrows g$ na $(a,b) \setminus \{x\}$

$$F'(y) = \lim_{y \to x} g(y) = \lim_{y \to x} \lim_{n \to \infty} g_n(y)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \lim_{y \to x} g_n(y) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) = f(x) \qquad \boxtimes$$

V (Dini)

Nechť $\{f_n\} \subseteq C([a,b])$ je monotónní a $f_n \to f \in C([a,b])$ (oboji na $[a,b]$). Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

D Stačí pro $\{f_n\}$ nerostoucí. Položme $g_n = f_n - f$. $C([a,b])$

Stačí ukázat $g_n \rightrightarrows 0$ na $[a,b]$.

Položme $\sigma_n = \max_{[a,b]} g_n$. Platí $\sigma_n \searrow \sigma$.

Potřebujeme $\sigma = 0$. Nechť $\sigma > 0$.

Volme $x_n \in [a,b]$, aby $\sigma_n = g_n(x_n)$.

Volme konvergentní podposloupnost $x_{n_k} \to x \in [a,b]$.

Existuje $n \in \mathbb{N}$, že $g_n(x) < \frac{\sigma}{2}$

Dále existuje $\delta > 0$, že

$$|g_n(y) - g_n(x)| < \frac{\sigma}{2} \quad y \in (x-\delta, x+\delta).$$

Najdeme $n_k \geq n$, že $x_{n_k} \in (x-\delta, x+\delta)$,
potom

$$\sigma \leq \sigma_{n_k} = g_{n_k}(x_{n_k}) \leq g_n(x_{n_k})$$

$$\leq |g_n(x_{n_k}) - g_n(x)| + g_n(x)$$

$$< \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma \quad \text{(spor)} \quad \boxtimes$$

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} = \int_0^1 \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Dini + záměna

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{x^{k+1}}{(k+1)\cdot(k+1)!} \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!}$$