Základní setup

- R, T polynomy nemají společné kořeny
- $\deg R < \deg T$, T má koeficient 1 u nejvyšší mocniny
- $T(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_M)^{m_M} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_Nx+q_N)^{n_N}$

V (o rozkladu na parciální zlomky)

Pokud platí podmínky výše, potom existují (jednoznačně určené) koeficienty A_i^l, B_j^k, C_j^k (indexy jako v sumě níže), že platí

$$\frac{R(x)}{T(x)} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{l=1}^{m_i} \frac{A_i^l}{(x-a_i)^l} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{B_j^k x + C_j^k}{(x^2+p_jx+q)^k}$$

Za každý člen $(x-a)^k$ v rozkladu T je tedy napravo

$$\frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \quad - k \text{ členů}$$

za $(x^2+px+q)^m$ pak

m členů

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{(x^2+px+q)^m}$$

Integrace parciálních zlomků:

U reálných kořenů použijeme vorkou lineární substituci:

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx \overset{c}{=} \begin{cases} A \log|x-a| & m=1 \\ A\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}} & m>1 \end{cases}$$

U kvadratických členů si integrál nejprve rozložíme:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m} + \int \frac{C-\frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^m}\,dx$$

První integrál spočítáme pomocí kvadratické substituce

$$\frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,dx \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{B}{2}\log(x^2+px+q) & m=1 \\ \frac{B}{2}\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} & m>1, \end{cases}$$

integrál $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}\,dx$ jsme počítali minule

Příklady

(1) $\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

V tomto případě koeficienty A a B můžeme spočítat tzv. zakrývací metodou.

$$A = \left.\frac{x+2}{x-1}\right|_{x=-1}$$ tj. ve jmenovateli ignorujeme $(x+1)$ a dosadíme kořen $x=-1$

$$B = \left.\frac{x+2}{x+1}\right|_{x=1}$$ tady ignorujeme $(x-1)$ a dosadíme koren $x=1$

(2)
$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)^2(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$$

zde je možné některé koeficienty spočítat zakrývacím pravidlem, ale ukážeme si obecnou metodu založenou na řešení soustav lineárních rovnic. Ilustrovat ji budeme na následujícím příkladě

(3)
$$\frac{x+1}{(x^2+1)\,x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Rovnost přenásobíme $(x^2+1)\cdot x^2$ a dostaneme rovnost polynomů

$$\begin{aligned} 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + x+1 &= Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)\,x^2 \\ &= x^3(A+C) + x^2(B+D) + x\cdot A + B \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů na obou stranách dostaneme soustavu $0=A+C,\ 0=B+D,\ 1=A,\ 1=B$.

Řešení $A=1,\ B=1,\ C=-1,\ D=-1$ pak dává

$$\frac{x+1}{(x^2+1)x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-x-1}{x^2+1}$$

Převod na parciální zlomky (R je vždy racionální funkce více proměnných)

- $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $\quad t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Př:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x+1}}\,dx = \left| \begin{matrix} t=\sqrt{x+1} & dx = 2t\,dx \\ x = t^2-1 & \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t^2-1+t}\,dt$$

- $\int R(x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$ $\quad t = \operatorname{tg} x$

Př:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x + 3}\,dx = \int \frac{\frac{1}{t^2+1}}{\frac{t}{t^2+1}+3} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dx$$

Zde jsme použili $t = \operatorname{tg} x$, což dává

$$t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$$

Podobně odvodíme

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1},\ \sin x \cos x = \frac{t}{t^2+1},\ x = \operatorname{arctg} x,\ dx = \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

- $R(\sin x, \cos x) \to t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

zde dostaneme např.

$$t^2 = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2 = \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \to$ Eulerovy substituce

Lepení

Pro $f(x) = \max(x^2, 1)$ $x \in \mathbb{R}$ platí

$\frac{x^3}{3}$ je PF k f na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$

x je PF k f na $(-1, 1)$.

Spočítáme $\lim\limits_{x \to \pm 1} \frac{x^3}{3} = \pm\frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x \to \pm 1} x = 1$.

Použitím (dvojnásobným) věty o lepení dostáváme, že funkce

$H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako

$$H(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} = \lim\limits_{x\to 1-} x - \lim\limits_{x\to 1+} \frac{x^3}{3} & x > 1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} = \lim\limits_{x\to -1+} x - \lim\limits_{x\to -1-} \frac{x^3}{3} & x < -1 \end{cases}$$

je PF k f na $\mathbb{R}$.

V předchozím příkladu jsme lepili dva kusy, často budeme muset lepit i v nekonečně mnoha bodech (např. pro $f(x) = \max(\sin x, 0)$), nebo v následujícím typickém případě u substituce $t = \operatorname{tg} x$ (a podobně pro $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$).

Integrujeme
$$\int \frac{1}{\cos^2 x + 2}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2+1} + 2} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$= \int \frac{1}{2t^2 + 3}\,dt$$
$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\operatorname{tg} x\right)$$

Integrál jsme ale spočítali pouze na intervalech tvaru $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, přitom primitivní funkce musí existovat na $\mathbb{R}$ (funkce $\frac{1}{\cos^2 x + 2}$ je spojitá na $\mathbb{R}$).

Z hlediska teorie je problém následující:
použili jsme 2. větu o substituci pro

$$\varphi(x) = \operatorname{arctg} x \qquad (\alpha,\beta) = (-\infty,\infty) \qquad (a,b) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 2} \qquad (f\circ\varphi \cdot \varphi')(t) = \frac{1}{2t^2+3} \quad \text{(po úpravě)}.$$

Tedy řešení je jen na (a,b) (a pomocí periodičnosti rozšířené na intervaly $(a,b)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Chceme-li nalézt řešení na $\mathbb{R}$ postupujeme následovně:

Platí

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi\pm} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \operatorname{tg} x\right) = \pm\frac{\pi}{2\sqrt{6}}$$

(tuto limitu aktuálně ale neumíme spočítat)

Po lepení ve všech bodech $\frac{\pi}{2}+k\pi$ dostaneme primitivní funkci k f na $\mathbb{R}$ ve tvaru

$$H(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \operatorname{tg} x\right) + k\frac{\pi}{\sqrt{6}} & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)+k\pi, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{6}} + k\frac{\pi}{6} & x = \frac{\pi}{2}+k\pi. \end{cases}$$

Na přednášce nebylo tak podrobně