Spojitost a limita funkcí jedné proměnné

Reálnou (komplexní) funkcí jedné proměnné budeme rozumět zobrazení $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$).

Budeme používat obvyklé značení intervalů, tedy např. $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ a rovněž $|x| = \max\{-x, x\}$.

Platí $|x+y| = \max\{-x-y, x+y\} \leq |x| + |y|$ (trojúhelníková nerovnost)

Def: (okolí a prstencové okolí)

Pro $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ definujeme okolí (resp. prstencové okolí) bodu a s poloměrem δ jako

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\}$$

$$P(a,\delta) = U(a,\delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta\}.$$

Def: (spojitost a limita - část 1)

Je-li f reálná funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, potom říkáme, že f je spojitá v a, pokud platí

(S) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Je-li f definována na prstencovém okolí $a \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}$, potom říkáme, že f má v bodě a limitu L ($\lim_{x \to a} f(x) = L$), pokud platí

(L) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Poznámky a příklady:

(1) (L) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \in U(L, \varepsilon)$

(1) $(L) \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in P(a,\delta): f(x) \in U(L,\varepsilon)$

$\iff \exists C>0\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in P(a,\delta): |f(x)-L| < C\varepsilon$

a analogicky pro (S).

(2) (Jednoznačnost limity) $\left(\left(\lim_{x\to a} f(x)=L\right) \wedge \left(\lim_{x\to a} f(x)=M\right)\right) \Rightarrow (L=M)$

D: (sporem) nechť $L \neq M$, potom

$\left(\lim_{x\to a} f(x)=L\right) \Rightarrow \left(\exists \delta_1>0\ \forall x \in P(a,\delta_1): |f(x)-L| < \frac{|M-L|}{2}\right)$

$\left(\lim_{x\to a} f(x)=M\right) \Rightarrow \left(\exists \delta_2>0\ \forall x \in P(a,\delta_2): |f(x)-M| < \frac{|M-L|}{2}\right)$

Potom $|L-M| \leq |(f(x)-L)+(M-f(x))| \leq |f(x)-L| + |f(x)-M|$

$< \frac{|M-L|}{2} + \frac{|M-L|}{2} = |M-L|$ ☒

(3) je-li f definována na okolí $a \in \mathbb{R}$, potom

$(f \text{ je spojitá v } a) \iff \left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right)$

(4) (důležitá) pokud $\exists \delta>0\ \forall x \in P(a,\delta): f(x)=g(x)$ a $L \in \mathbb{R}$,

potom $\left(\lim_{x\to a} f(x)=L\right) \iff \left(\lim_{x\to a} g(x)=L\right)$

(5) pro $A, B \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x)=Ax+B$ spojitá ve všech bodech $a \in \mathbb{R}$.

D: $|f(x)-f(a)| = |Ax+B-(A\cdot a+B)| = A|x-a|$.

Tedy pro $\varepsilon>0$ stačí zvolit $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$ $(A \neq 0)$ a $\delta = 13$ $(A=0)$

(6) položme $f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Potom

(6) položme $f(x) = \begin{cases} \dots \\ 0 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Potom

f není spojitá v žádném bodě $\mathbb{R}$.

(7) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} x+a = 2a$ a analogicky pro

každý polynom s kořenem a.

L: Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, potom

(1) $\exists C>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in P(a,\delta): |f(x)|<C$

(2) pokud $L\neq 0$, pak $\exists D>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in P(a,\delta): \dfrac{1}{|f(x)|}<D$

bude příště

D: (1) $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\right) \Rightarrow \exists \delta>0\ \forall x\in P(a,\delta): |f(x)-L|<1$,

potom $|f(x)| \leq |f(x)-L| + |L| < 1+L =: C$ pro $x\in P(a,\delta)$

(2) $(L\neq 0) \Rightarrow \exists\delta>0\ \forall x\in P(a,\delta): |f(x)-L| < \frac{|L|}{2}$. Pro $x\in P(a,\delta)$

tedy platí $|L| \leq |L-f(x)| + |f(x)| \leq \frac{|L|}{2} + |f(x)|$

a tedy $|f(x)| \geq \frac{|L|}{2}$ a $\dfrac{1}{|f(x)|} \leq \dfrac{2}{|L|}$ $\boxtimes$

V: (aritmetika limit – verze 1)

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Potom

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = A+B$

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$

(3) pokud $B\neq 0$, pak $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

D: Volme $\varepsilon>0$, potom

$\exists\delta_1>0\ \forall x\in P(a,\delta_1): |f(x)-A|<\varepsilon$

$\exists\delta_2>0\ \forall x\in P(a,\delta_2): |g(x)-B|<\varepsilon$

bude příště

$\exists \delta_1 > 0\ \forall x \in P(a,\delta_1): |f(x) - A| < \varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0\ \forall x \in P(a,\delta_2): |g(x) - B| < \varepsilon$

$\exists C > 0\ \exists \delta_3 > 0\ \forall x \in P(a,\delta_3): |f(x)| < C$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, potom platí pro $x \in P(a,\delta)$

$$|f(x) + g(x) - (A+B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow (1)$$

$$\begin{aligned} |f(x)\cdot g(x) - A\cdot B| &\leq |f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot B| + |f(x)\cdot B - A\cdot B| \\ &= |f(x)|\cdot|g(x) - B| + |B|\cdot|f(x) - A| \\ &\leq C\cdot\varepsilon + |B|\cdot\varepsilon = (C + |B|)\varepsilon \quad \Rightarrow (2) \end{aligned}$$

Pokud $B \neq 0$ potom

$\exists D > 0\ \exists \delta_4 > 0\ \forall x \in P(a,\delta_4): \frac{1}{|g(x)|} < D.$

Položme $\bar{\delta} = \min\{\delta, \delta_4\} > 0$, potom pro $x \in P(a,\bar{\delta})$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{1}{B\cdot|g(x)|}\cdot|B - g(x)| < \frac{D}{B}\varepsilon$$

Tedy $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ podle (2) $\blacksquare$.