V: (Archimedova vlastnost $\mathbb{R}$)

(AV) Je-li $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > x$.

D: (Sporem) Předpokládejme, že $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: n \leq x$.
Potom $\mathbb{N}$ je neprázdná shora omezená.
Položme $s = \sup \mathbb{N}$.
Potom existuje $n \in \mathbb{N}$, že $n > s - 1$, což dává
$s < n+1 \in \mathbb{N}$ – spor s volbou s. $\boxtimes$

V: (Hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)
Pro každá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existuje:
(1) $p \in \mathbb{Q}$, $a < p < b$,
(2) $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $a < q < b$.

D: (1) Podle AV existuje $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{b-a}$.
Potom $bn > an + 1 \geq \lfloor an \rfloor + 1 > an$
a stačí položit $p = \frac{\lfloor an \rfloor + 1}{n}$.

(2) Podle (1) existuje $\tilde{p} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, že $\sqrt{3}a < \tilde{p} < \sqrt{3}b$.
Stačí položit $q = \frac{\tilde{p}}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\boxtimes$

V: (o infimu)
Každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.

D: Je-li $M \neq \emptyset$ zdola omezená, potom
množina $-M := \{x \in \mathbb{R} : -x \in M\}$ je
neprázdná shora omezená. Položme $s = \sup(-M)$.
Zřejmě
(*) (x je horní závora $-M$) $\Leftrightarrow$ ($-x$ je dolní závora M)

Zřejmě

(*) (x je horní závora M) $\Leftrightarrow$ ($-x$ je dolní závora M).

Tedy $-s$ je dolní závora M a pokud x je dolní závora M, potom podle (*) $-x \geq s$, což dává $x \leq -s$ a $-s = \inf M$. ☐

Množiny a zobrazení

Množiny zadáváme buď výčtem prvků $\{1, 3, 7, i+1\}$, nebo ve tvaru $\{x \in X : \varphi(x)\}$, kde φ je výroková funkce na množině X.

Nepoužíváme zápis $\{x : \varphi(x)\}$, např.

$$A = \{X : X \notin X\}$$ by vedlo k tzv.

Russelově paradoxu: $A \in A \Rightarrow A \notin A$

$A \notin A \Rightarrow A \notin A$

Budeme používat následující:

- $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \in B)$ (A je podmnožina B)
- $A = B \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$ (A se rovná B)
- $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ (A průnik s B)
- $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ (doplněk B v A)
- $A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}$ (sjednocení A a B),

kde X je množina splňující $A \subseteq X$, $B \subseteq X$.

Platí $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Platí $$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$
$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$
(tzv. De Morganovy vzorce)

Budeme rovněž používat
$$\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x \in X : \forall \alpha \in A : x \in M_\alpha\}$$
$$\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x \in X : \exists \alpha \in A : x \in M_\alpha\}$$
pro $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ systém podmnožin X.

Opět platí
$$M \setminus \bigcup_\alpha M_\alpha = \bigcap_\alpha (M \setminus M_\alpha),$$
$$M \setminus \bigcap_\alpha M_\alpha = \bigcup_\alpha (M \setminus M_\alpha).$$

Podmnožinu $F \subseteq X \times Y$ nazveme zobrazením z X do Y ($F : X \to Y$) pokud

(1) $\forall x \in X \; \exists y \in Y : (x,y) \in F$

(2) $\forall (x,y) \in F \; \forall (u,v) \in F : (x = u) \Rightarrow (y = v)$

Místo $(x,y) \in F$ píšeme $F(x) = y$.

Říkáme, že F je zobrazení z X na Y ($F : X \xrightarrow{na} Y$) pokud platí $\forall y \in Y \; \exists x \in X : F(x) = y$

Říkáme, že zobrazení $F : X \to Y$ je prosté, pokud $\forall x \in X \; \forall y \in X : (F(x) = F(y)) \Rightarrow (x = y)$

pokud $\forall x \in X\ \forall y \in X: (F(x) = F(y)) \Rightarrow (x = y)$

Pokud $F: X \to Y$ je prosté a na definujeme $F^{-1}: Y \to X$ předpisem $\forall (x,y) \in X \times Y: (F^{-1}(y) = x) \Leftrightarrow (F(x) = y)$

F^{-1} nazýváme inverzní zobrazení k F.

Pro $F: X \to Y$ nazýváme X definičním oborem F (zn. $X = D_F$) a $R_F = \{y \in Y : \exists x \in X : F(x) = y\}$ nazýváme oborem hodnot F.

Pokud $F: X \to Y$, $G: Z \to W$ a $R_F \subseteq Z$ definujeme složené zobrazení $G \circ F: X \to W$ předpisem

$$G \circ F(x) = G(F(x)),\ x \in X.$$

Příklady

- $F(x) = \frac{1}{x}$ $G(z) = z^3$, potom $G \circ F(x) = \frac{1}{x^3}$
- $F \circ F^{-1}(x) = x$, $(F^{-1})^{-1} = F$.