Autonomní rovnice $f(x,y,z) = g(y,z)$

E-L rovnice $g_y(y,y') - [g_z(y,y')]' = 0$

Upravíme
$$0 = y' g_y(y,y') - y'[g_z(y,y')]'$$
$$= y' g_y(y,y') - [y' g_z(y,y')]' + y'' g_z(y,y')$$
$$= [g(y,y')]' - [y' g_z(y,y')]'$$
$$0 = [g(y,y') - y' g_z(y,y')]'$$

Tedy $g(y,y') - y' g_z(y,y') = C$

[pozor není ekvivalentní, násobili jsme y', může nastat $y' = 0$]

Př. $f(x,y,z) = \sqrt{1+z^2} = g(y,z)$

$\left[F(y) = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} \right]$

Takto dostaneme $\left[g_z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right]$

$$\sqrt{1+(y')^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

Čili $$\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

Vázané extrémy

Uvažujeme nový funkcionál v integrálním tvaru

tedy $g \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^2)$, $G(y) = \int_a^b g(x,y,y')$, $C \in \mathbb{R}$

a množinu $$\tilde{M} = \{y \in M : G(y) = C\}$$

Opět zavádíme $\Psi(u) = G(u+K)$ $u \in X$.

[třeba pro izoperimetrickou nerovnost]

Hlavním (a jediným) teoretickým výsledkem

bude :

V (o Lagrangeových multiplikátorech)

Nechť y je bodem extrému F vzhledem k $\tilde{M}$, potom platí jedna z podmínek

(1) $D_h \Psi(y) = 0$, $h \in X$

(2) existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(*) \quad D_h \Phi(y) = \lambda D_h \Psi(y), \quad h \in X.$$

D: Pokud neplatí (1) zvolme h, aby $D_h \Psi(y) \neq 0$. Volme $k \in X \setminus \{h, 0\}$.

Položme $U(s,t) = F(y + sk + th)$ $\quad // C$

$V(s,t) = G(y + sk + th) - G(y)$

Potom $V(0,0) = 0$

$V_t(0,0) = D_h \Phi(y) \neq 0$ $[V_t \in C^1]$

Podle věty o implicitní funkci existuje

$$\xi \in C^1((-\delta,\delta)),\ \xi(0)=0,\ \text{že}$$

$$V(s,\xi(s))=0 \qquad s\in(-\delta,\delta)$$

Tedy $\quad y+sk+\xi(s)h\in\tilde{M}$

a proto 0 je bodem extrému $s\to U(s,\xi(s))$.

Tedy $\quad 0=\left[U(s,\xi(s))\right]'\Big|_{s=0}=U_s(0,0)+\xi'(0)\cdot U_t(0,0)$

Ale

$$\underbrace{=U_s(0,0)}_{D_k\Phi(u)}-\overbrace{\frac{V_s(0,0)}{V_t(0,0)}}^{D_k\Psi(u)}\cdot U_t(0,0)$$

A stačí položit $\quad \lambda=\frac{U_t(0,0)}{V_t(0,0)}=D_h\Psi(u)$, kde $U_t(0,0)=D_h\Phi(u)$ $\quad\boxed{\diagdown}$

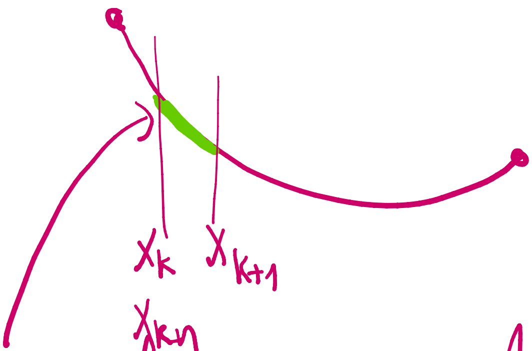
Položme $\qquad h(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$

a $\quad H(y)=\int_a^b h(x,y,y')$.

E-L pro H je

$$f_y(x,y,y') - \lambda g_y(x,y,y') - \left[f_z(x,y,y') - \lambda g_z(x,y,y')\right]' = 0$$

Úloha o brachystochroně



$$\text{čas} \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1+(y')^2} \cdot \frac{1}{v(x_k)}$$

$$\text{Celkový čas} \quad \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_a^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}$$

$$\left[\ \frac{1}{2} m v^2 + mgy = mgA \ \ [=0]\ \right]$$

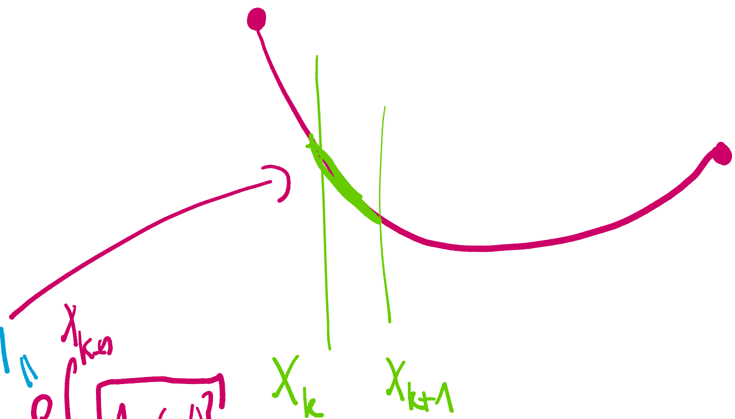
$$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{-y}} \qquad f_z = \frac{z}{\sqrt{-y(1+z^2)}}$$

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}} - y'\cdot\frac{y'}{\sqrt{-y(1+(y')^2)}} = C$$

$$1+(y')^2-(y')^2 = C\sqrt{-y(1+(y')^2)}$$

$$\boxed{1 = C\sqrt{-y(1+(y')^2)}}$$

Zavěšený řetez



hmotnost je $\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\rho}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sqrt{1+(y')^2}$

potenciální energie je $\approx mg\, y(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sqrt{1+(y')^2}$

Tedy $F(y) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{C}}\cdot\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}$

a $\qquad G(y) = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}$

$$h(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2} - \lambda\sqrt{1+(y')^2} = (y-\lambda)\sqrt{1+z^2}$$

$$h_z = (y-\lambda)\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$(y-\lambda)\sqrt{1+(y')^2} - (y-\lambda)\,y'\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

$$\boxed{(y-\lambda) = C\sqrt{1+(y')^2}}$$

Legendrova transformace

$$f^*(\xi) = \max_{x\in\mathbb{R}}\Big[\underbrace{\xi\cdot x - f(x)}_{h(\xi)}\Big] = \underline{\xi\left((f')^{-1}(\xi)\right) - f\left((f')^{-1}(\xi)\right)}$$

$$\left[f'(x) = \xi \qquad x = (f')^{-1}(\xi)\right]$$

$$f^*(\xi) = \xi \cdot h(\xi) - f(h(\xi))$$

$$(f^*)'(\xi) = h(\xi) + \xi \cdot h'(\xi) - f'(h(\xi))\, h'(\xi)$$

$$= h(\xi) + \left[\xi - f'(h(\xi))\right] h'(\xi) = h(\xi) = (f')^{-1}(\xi)$$

$$(f^*)'(f'(x)) = x$$

$$\boxed{\xi = f'(x) \rightarrow (f^*)'(\xi) = x}$$