Přednáška 12.11.

středa 11. listopadu 2020 19:08

Def: (primitivní funkce)

Funkci F nazýváme primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b), pokud $F' = f$ na (a,b).

Primitivní funkce není určena jednoznačně, pokud je F PF k f na I a $C \in \mathbb{R}$, je zřejmě i $F+C$ PF k f na I.

Na druhou stranu, jsou-li F a G dvě primitivní funkce k f na I, potom $(F-G)' = 0$ na I a tedy $F-G = C$ na I pro nějaké $C \in \mathbb{R}$. Množina všech primitivních funkcí k f na I má tedy tvar $\{F+C : C \in \mathbb{R}\}$, kde F je nějaká (libovolná) PF k f na I.

Def: (neurčitý integrál)

Neurčitým integrálem funkce f na I nazýváme množinu všech primitivních funkcí k f na I. Pro neurčitý integrál používáme značení $\int f$ nebo $\int f(x)dx$.

Pozor: primitivní funkce/neurčitý integrál vždy jen na intervalu

Jak nám vzorečky pro derivování pomůžou při výpočtu integrálů:

1) Když poznáme derivaci (tabulkové integrály)

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx \overset{c}{=} \begin{cases} \operatorname{argtanh} x & \text{na } (-1,1) \\ \operatorname{argcotanh} x & \text{na } (-\infty,-1) \text{ nebo } (1,\infty) \end{cases}$$

2) Linearita derivace (víme, že $(\sin x)' = \cos x$ a $(x^4)' = 4x^3$)

$$\int \cos x + \frac{x^3}{7}\,dx \overset{c}{=} \sin x + \frac{1}{7}\cdot\frac{x^4}{4}$$

3) Vzoreček pro derivaci součinu (pomocí $(\cos x)' = -\sin x$)

$$\int x\cos x\,dx + \int \sin x\,dx = \int (x\sin x)'\,dx \overset{c}{=} x\sin x$$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x$$

(neznámý integrál jsme převedli na tabulkový)

4) Vzoreček pro derivaci složené funkce – přímočará verze

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx \overset{c}{=} \sin(\log x).$$

Odhadneme, že $\frac{1}{x}$ je derivace vnitřní funkce $\log x$ a uhádneme, že integrál je roven $\sin(\log x)$.

5) vzoreček pro derivaci složené funkce - nepřímé použití

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx \overset{c}{=} F(x) \leftarrow \text{neznámá funkce}$$

snadno najdeme pomocí předchozích metod

Protože $(F\circ \sinh x)' = \sqrt{1+\sinh^2 x}\cdot \cosh x = \cosh^2 x = H'(x)$

Pak tedy $F\circ\sinh \overset{c}{=} H$ a tedy $F = H\circ \operatorname{argsinh}$

Na těchto postupech jsou založeny následující věty, jejich důkaz je veden přímočarým výpočtem.

V: (linearita PF)

Je-li F PF k f a G PF k g (obojí na I) a $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Potom $\alpha F+\beta G$ je PF k $\alpha f+\beta g$ (na I).

D: $(\alpha F+\beta G)' = \alpha f+\beta g$ $\blacksquare$

V (per partes pro neurčitý integrál)

Jsou-li $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$, f',g' existují na (a,b) potom

$$\int f'g = fg - \int fg',$$ pokud integrál napravo existuje.

D: Nechť H je PF k fg'. Potom pro $F = fg - H$ máme

$$F' = (fg - H)' = f'g + fg' - fg' = f'g$$ ☒

V (první věta o substituci)

Nechť $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $\varphi:(\alpha,\beta) \to (a,b)$, f' existuje na (a,b), φ' existuje na (α,β). Potom

$$\int f' \circ \varphi \cdot \varphi' \overset{c}{=} f \circ \varphi .$$

D: $(f \circ \varphi)' = f' \circ \varphi \cdot \varphi'$ ☒

V (druhá věta o substituci)

Nechť $f:(a,b)$, $\varphi:(\alpha,\beta) \overset{na}{\to} (a,b)$, $\varphi' > 0$ $(\varphi' < 0)$ na (α,β).
Pokud H je PF k $f \circ \varphi \cdot \varphi'$, potom

$$\int f \overset{c}{=} H \circ \varphi^{-1} \quad \text{na } (\alpha,\beta).$$

derivace inverzní funkce

D: $$(H \circ \varphi^{-1})' = (H' \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})' = (f \circ \varphi \cdot \varphi') \circ \varphi^{-1} \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$

$$= f \circ \underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1}}_{\text{identita}} \cdot \varphi' \circ \varphi^{-1} \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = f$$ ☒

na přednášce bylo jinak → viz následující přednáška

V (o spojitosti primitivních funkcí)
Je-li F PF k f na I, potom F je spojitá na I.

D: $F'(a)$ existuje na I, tedy F je spojitá na I.

V (o primitivních funkcích spojitých funkcí)
Je-li f spojitá na (a,b), potom f má PF na (a,b).

Bez důkazu

S těchto dvou vět snadno odvodíme pravidlo o lepení primitivních funkcí. (příště)