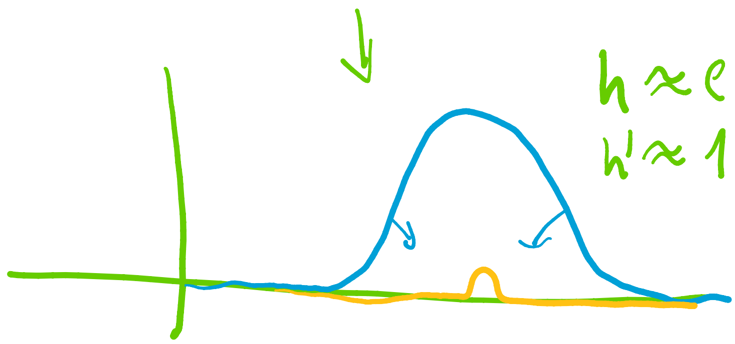
Přednáška 11.10.
pondělí 11. října 2021 8:42

(Lagrangeova nutná podmínka)

v obecném případě: y minimum $\Rightarrow D^2_{h,h}\Phi(y)\geq 0 \quad \forall h.$

pro integrální funkcionály: $f_{zz}(x,y,y')\geq 0$ na $[a,b]$

Dostaneme aplikací vhodné testovací funkce h



$h\approx \varepsilon$

$h'\approx 1$

V (konvexita a extrémy)

Nechť pro každé $x\in[a,b]$ je funkce $g:(u,v)\to f(x,u,v)$ konvexní a y je stacionární bod F. Potom y je bodem minima F.

——— vsuvka o konvexních funkcích ———

Je-li $g\in C^1(\mathbb{R}^d)$ konvexní, potom pro $u,v\in\mathbb{R}^d$ platí

$$g(v)-g(u)\geq \nabla g(u)(v-u)$$

D: v jedné dimenzi víme, že $\nabla g(u)\leq \dfrac{g(v)-g(u)}{v-u}$, ve více dimenzích stačí uvážit restrikci g na přímku $u + t(v-u)$.

— konec vsuvky —

D Nechť $w \in M$, $w \neq y$. Potom

$$F(w) - F(y) = \int_a^b f(x,w,w') - f(x,y,y')$$

$$\geq \int_a^b \left(f_y(x,y,y'), f_z(x,y,y')\right) \cdot (w-y, w'-y')$$

$$= \int_a^b f_y(x,y,y')\underbrace{(w-y)}_{"h \in X \setminus \{0\}} + f_z(x,y,y')\underbrace{(w'-y')}_{"h'} = 0 \qquad \boxtimes$$

Další postačující podmínka (y stacionární)

$$D^2_{h,h}\,\phi(u) \geq \alpha \|h\|^2 \qquad \|h\| < \delta$$

$$t \to F(y+th) \text{ konvexní}$$

Uvažme ještě znova $D^2_{h,h}\Phi$ (y stacionární)

$$D^2_{h,h}\Phi(u) = \int_a^b f_{yy} h^2 + 2 f_{yz} h h' + f_{zz} h'^2$$

Opět použijeme per partes na

$$\int_a^b f_{yz}\, 2hh' = \int_a^b f_{yz} (h^2)' = \overset{=0}{\left[f_{yz} h^2\right]_a^b} - \int (f_{yz})' h^2$$

Tedy $D^2_{h,h}\Phi(u) = \int_a^b \underbrace{\left[f_{yy} - (f_{yz})'\right]}_{Q} h^2 + \underbrace{f_{zz}}_{P} (h')^2$

Uvažme funkcionál $G : X \to \mathbb{R}$ definovaný jako

$$G(w) = \int_a^b Q \cdot w^2 + P \cdot (w')^2 = \int_a^b g(x, w, w')$$

pro $g(x,y,z) = Q(x) \cdot y^2 + P(x) \cdot z^2$

Protože $g_y(x,y,z) = 2Q(x)y$ $g_z(x,y,z) = 2P(x)z$
dostáváme E-L rovnici pro G ve tvaru

$$2Qw - [2Pw']' = 0 \quad (J)$$

Jacobiho (pomocná) rovnice

D (Jacobiho rovnice a konjugovaný bod)

Rovnici (J) nazýváme Jacobiho rovnicí.
Bod $x \in (a,b]$ nazveme konjugovaný k bodu a existuje nenulové řešení rovnice (J) splňující $w(a) = w(x) = 0$.

V (Jacobiho)

Nechť y je stacionární bod F a $f_{zz}(x,y,y') > 0$ na $[a,b]$. Potom

(1) pokud a nemá na $(a,b]$ konjugovaný bod, potom y je bodem minima

(2) pokud je y bodem minima, potom a nemá konjugovaný bod v (a,b).

Vázané extrémy

Uvažujeme stejný problém, jen navíc přidáme vazbu. Pro $g \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^2)$ a $G: M \to \mathbb{R}$

$$G(y) = \int_a^b g(x,y,y') \quad \text{a} \quad C \in \mathbb{R}.$$

uvažujeme množinu $\tilde{M} = \{y \in M : G(y) = C\}$

Analogicky k F a ϕ budeme definovat

$$\Psi(u) = \int_a^b g(x, u+\varkappa, u'+\varkappa') \quad u \in X.$$

V (o Lagrangeových multiplikátorech) Zde jsme skončili

Nechť y je bodem extrému F vzhledem v $\hat{M}$.

Potom platí alespoň jedna z podmínek

(1) $D_h \Psi(u) = 0, \; h \in H$

(2) existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$D_h \Phi(u) = \lambda D_h \Psi(h)$$

D: Volme $h \in X$, že $D_h \Psi(u) \neq 0 \; [=1]$

a $k \in X$ volme libovolně. Pro $s, t \in \mathbb{R}$

definujme $U(s,t) = F(y + sk + th)$ $/\!/ C$

$$V(s,t) = G(y + sk + th) - G(y)$$

Potom $V_t(0,0) = D_h \Phi(u) = 1 \neq 0$

a $V(0,0) = 0$.

Podle Věty o IF existuje $\xi : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$

$\xi(0)=0$, že $V(s,\xi(s))=0$, $s \in (-\delta,\delta)$.

$G(y+sk+\xi(s)h) = C$ tedy pro $s \in (-\delta,\delta)$

je $y+sk+\xi(s)h \in \tilde{M}$ a navíc $(k,h \in X)$.

Tedy 0 je bodem extrému funkce $s \to U(s,\xi(s))$.

A tedy

$$0 = \Big[U(s,\xi(s))\Big]'\Big|_0 = U_s(0,\xi(0)) + \xi'(0)\,U(0,\xi(0))$$

$$= \underbrace{U_s(0,\xi(0))}_{D_k\Phi(u)} - \underbrace{\frac{\overbrace{V_s(0,0)}^{D_k\Psi(u)}}{V_t(0,0)}\,U(0,\xi(0))}_{\lambda}$$

$$D_h\Phi(u) = \lambda\, D_k\Psi(u).$$