Číselné řady

Definice ((částečný) součet řady)

Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $N \in \mathbb{N}$ *definujeme* s_N*, N-tý částečný součet nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, formulí* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$*. Existuje-li vlastní limita* $s = \lim_{N\infty} s_N$*, nazýváme s součtem nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a říkáme, že nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. V opačném případě říkáme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Číselné řady

Definice ((částečný) součet řady)

Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $N \in \mathbb{N}$ *definujeme* s_N, *N-tý částečný součet nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *formulí* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. *Existuje-li vlastní limita* $s = \lim_{N\infty} s_N$, *nazýváme s součtem nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a říkáme, že nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. V opačném případě říkáme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Příklad

- *Pro* $a_n = 0$ *dostáváme* $s_N = 0$ *a* $\lim_{N\to\infty} s_N = 0$

Číselné řady

Definice ((částečný) součet řady)

Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $N \in \mathbb{N}$ *definujeme* s_N, *N-tý částečný součet nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *formulí* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. *Existuje-li vlastní limita* $s = \lim_{N\infty} s_N$, *nazýváme s součtem nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a říkáme, že nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. V opačném případě říkáme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Příklad

- *Pro* $a_n = 0$ *dostáváme* $s_N = 0$ *a* $\lim_{N\to\infty} s_N = 0$
- *Pro* $a_n = 1$ *dostáváme* $s_N = N$ *a* $\lim_{n\to\infty} s_N = +\infty$

Číselné řady

Definice ((částečný) součet řady)

Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $N \in \mathbb{N}$ *definujeme* s_N, *N-tý částečný součet nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *formulí* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. *Existuje-li vlastní limita* $s = \lim_{N\infty} s_N$, *nazýváme s součtem nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a říkáme, že nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. V opačném případě říkáme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Příklad

- *Pro* $a_n = 0$ *dostáváme* $s_N = 0$ *a* $\lim_{N\to\infty} s_N = 0$
- *Pro* $a_n = 1$ *dostáváme* $s_N = N$ *a* $\lim_{n\to\infty} s_N = +\infty$
- *Pro* $a_n = (-1)^n$ *dostáváme* $s_N = \frac{(-1)^N - 1}{2}$ *a* $\lim_{N\to\infty} s_N$ *neexistuje (ale částečné součty jsou omezené).*

Příklady

- Pro $a_n = 0$ dostáváme $s_N = 0$ a $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = 0$
- Pro $a_n = 1$ dostáváme $s_N = N$ a $\lim\limits_{n\to\infty} s_N = +\infty$
- Pro $a_n = (-1)^n$ dostáváme $s_N = \frac{(-1)^N - 1}{2}$ a $\lim\limits_{N\to\infty} s_N$ neexistuje (ale částečné součty jsou omezené).
- Pro $a_n = 2^{-n}$ dostáváme $s_N = \frac{1}{2}\frac{1-2^{-N}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - 2^{-N}$ a $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = 1$

Příklady

- Pro $a_n = 0$ dostáváme $s_N = 0$ a $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = 0$
- Pro $a_n = 1$ dostáváme $s_N = N$ a $\lim\limits_{n\to\infty} s_N = +\infty$
- Pro $a_n = (-1)^n$ dostáváme $s_N = \frac{(-1)^N - 1}{2}$ a $\lim\limits_{N\to\infty} s_N$ neexistuje (ale částečné součty jsou omezené).
- Pro $a_n = 2^{-n}$ dostáváme $s_N = \frac{1}{2}\frac{1-2^{-N}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - 2^{-N}$ a $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = 1$
- Pro $a_n = \frac{2^{-n}}{7n^4 \cdot n!}$ dostáváme nerovnosti $a_n \leq 2^{-n}$, $s_N \leq 1 - 2^{-N} \leq 1$, s_N je rostoucí a tedy $\lim\limits_{N\to\infty} s_N$ existuje vlastní.

Nutná podmínka konvergence řady

Věta (nutná podmínka konvergence řady)

Pokud nekonečná řada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad

- $a_n = (-1)^n$ *nutnou podmínku nesplňuje (a tedy řada nekonverguje)*

Nutná podmínka konvergence řady

Věta (nutná podmínka konvergence řady)

Pokud nekonečná řada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad

- $a_n = (-1)^n$ *nutnou podmínku nesplňuje (a tedy řada nekonverguje)*
- $a_n = 5^{-n}$ *nutnou podmínku splňuje (a řada konverguje)*

Nutná podmínka konvergence řady

Věta (nutná podmínka konvergence řady)

Pokud nekonečná řada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad

- $a_n = (-1)^n$ *nutnou podmínku nesplňuje (a tedy řada nekonverguje)*
- $a_n = 5^{-n}$ *nutnou podmínku splňuje (a řada konverguje)*
- $a_n = \frac{1}{n}$ *nutnou podmínku splňuje (ale řada nekonverguje)*

Řady s nezápornými členy

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy (tj. $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$), limita $\lim_{N\to\infty} s_N$ vždy existuje - buď konečná, nebo $+\infty$ - proto často píšeme

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Řady s nezápornými členy - srovnávací kritéria

Věta (srovnávající kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a předpokládejme, že existuje* $m \in \mathbb{N}$ *takové, že* $a_n \geq b_n$, $n \geq m$. *Potom*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Řady s nezápornými členy - srovnávací kritéria

Věta (limitní srovnávající kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a předpokládejme, že existuje limita* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in C \in \overline{\mathbb{R}}$. *Potom*

1. *pokud* $C \neq 0$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
2. *pokud* $C \neq \infty$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Řady s nezápornými členy - srovnávací kritéria

S jakými řadami srovnáváme?

- pro $q > 0$ platí: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty \iff q < 1$
- pro $p \in \mathbb{R}$ platí: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1$
- pro $p \in \mathbb{R}$ platí: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} < \infty \iff p > 1$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n}$.

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n}$.

Nutná podmínka splněna (4^n rychlejší než 3^n).

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n}$.

Nutná podmínka splněna (4^n rychlejší než 3^n).

Dále máme $b_n := \frac{1+3^n}{4^n+3^n} < \frac{3^n+3^n}{4^n} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n =: a_n, \quad n \in \mathbb{N}$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n}$.

Nutná podmínka splněna (4^n rychlejší než 3^n).

Dále máme $b_n := \frac{1+3^n}{4^n+3^n} < \frac{3^n+3^n}{4^n} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n =: a_n, \quad n \in \mathbb{N}$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n}$.

Nutná podmínka splněna (4^n rychlejší než 3^n).

Dále máme $b_n := \frac{1+3^n}{4^n+3^n} < \frac{3^n+3^n}{4^n} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n =: a_n, \quad n \in \mathbb{N}$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n} < \infty$$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n}$.

(Nutná podmínka splněna.)

Položíme $b_n := \frac{1+3^n}{4^n+3^n}, \quad a_n := \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n}$.

(Nutná podmínka splněna.)

Položíme $b_n := \dfrac{1+3^n}{4^n+3^n}, \quad a_n := \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Potom $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1+3^n}{4^n+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1} = 1 =: C.$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n}$.

(Nutná podmínka splněna.)

Položíme $b_n := \frac{1+3^n}{4^n+3^n}, \quad a_n := \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1+3^n}{4^n+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1} = 1 =: C.$

1. pokud $C \neq 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
2. pokud $C \neq \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n}$.

(Nutná podmínka splněna.)

Položíme $b_n := \frac{1+3^n}{4^n+3^n}, \quad a_n := \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1+3^n}{4^n+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1} = 1 =: C.$

1. pokud $C \neq 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
2. pokud $C \neq \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{4^n+3^n} < \infty$$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{4^n}$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{4^n}$

Nutná podmínka splněna (exponenciála rychlejší než polynom).

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{4^n}$

Nutná podmínka splněna (exponenciála rychlejší než polynom).

Položíme $b_n := \frac{n^7}{4^n}, \quad a_n := \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{4^n}$

Nutná podmínka splněna (exponenciála rychlejší než polynom).

Položíme $b_n := \frac{n^7}{4^n}, \quad a_n := \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{n^7}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^7} = \infty =: C.$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{4^n}$

Nutná podmínka splněna (exponenciála rychlejší než polynom).

Položíme $b_n := \frac{n^7}{4^n}, \quad a_n := \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{n^7}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^7} = \infty =: C.$

1. pokud $C \neq 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,$
2. pokud $C \neq \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{4^n}$

Nutná podmínka splněna (exponenciála rychlejší než polynom).

Položíme $b_n := \frac{n^7}{4^n}, \quad a_n := \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{n^7}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^7} = \infty =: C.$

1. pokud $C \neq 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
2. pokud $C \neq \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{4^n} < \infty$$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

Nutná podmínka splněna (ve jmenovateli vyšší mocnina).

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

Nutná podmínka splněna (ve jmenovateli vyšší mocnina).

Položíme $a_n := \frac{n^2}{n^3+1}, \quad b_n := \frac{1}{n}.$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

Nutná podmínka splněna (ve jmenovateli vyšší mocnina).

Položíme $a_n := \frac{n^2}{n^3+1}, \quad b_n := \frac{1}{n}$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = 1 =: C$.

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

Nutná podmínka splněna (ve jmenovateli vyšší mocnina).

Položíme $a_n := \frac{n^2}{n^3+1}, \quad b_n := \frac{1}{n}$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = 1 =: C$.

1. pokud $C \neq 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
2. pokud $C \neq \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Srovnávací kritéria - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

Nutná podmínka splněna (ve jmenovateli vyšší mocnina).

Položíme $a_n := \frac{n^2}{n^3+1}, \quad b_n := \frac{1}{n}$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = 1 =: C$.

1. pokud $C \neq 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
2. pokud $C \neq \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \infty$$

Řady s nezápornými členy - podílové kritérium

Věta (podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy. Položme* $L = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *a* $l = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. *pokud* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $l > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).

Položme $a_n := \frac{2^n}{n!}$.

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).

Položme $a_n := \frac{2^n}{n!}$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 =: L$

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).

Položme $a_n := \frac{2^n}{n!}$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 =: L$

1. pokud $L < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. pokud $l > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).

Položme $a_n := \frac{2^n}{n!}$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 =: L$

1. pokud $L < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. pokud $l > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Platí tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} < \infty$.

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$

Nutná podmínka splněna?

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$

Nutná podmínka splněna?

Položme $a_n := \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$.

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$

Nutná podmínka splněna?

Položme $a_n := \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$.

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{5^{n+1}}}{\binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{5\frac{(2n)!}{n!n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{5(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{5(n^2+2n+1)} = \frac{4}{5} =: L$$

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$

Nutná podmínka splněna?

Položme $a_n := \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$.

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{5^{n+1}}}{\binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{5\frac{(2n)!}{n!n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{5(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{5(n^2+2n+1)} = \frac{4}{5} =: L$$

1. pokud $L < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. pokud $l > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Podílové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$

Nutná podmínka splněna?

Položme $a_n := \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$.

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{5^{n+1}}}{\binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{5\frac{(2n)!}{n!n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{5(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{5(n^2+2n+1)} = \frac{4}{5} =: L$$

1. pokud $L < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. pokud $l > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Platí tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} < \infty$.

Řady s nezápornými členy - odmocninové kritérium

Věta (odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Položme* $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
Potom

1. *pokud* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $L > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Řady s nezápornými členy - odmocninové kritérium

Věta (odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Položme* $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
Potom

1. *pokud* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $L > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Důležité limity: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Odmocninové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Odmocninové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).

Odmocninové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).

Položme $a_n := \frac{n!}{n^n}$.

Odmocninové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).

Položme $a_n := \frac{n!}{n^n}$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} =: L$

Odmocninové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).
Položme $a_n := \frac{n!}{n^n}$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} =: L$

1. pokud $L < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. pokud $L > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Odmocninové kritérium - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Nutná podmínka splněna (známá limita).

Položme $a_n := \frac{n!}{n^n}$.

Potom $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} =: L$

1. pokud $L < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. pokud $L > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Platí tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$.

Kondenzační kritérium

Věta (kondenzační kritérium)

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$$

Kondenzační kritérium

Věta (kondenzační kritérium)

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$$

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.

Kondenzační kritérium

Věta (kondenzační kritérium)

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$$

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.

Podle kondenzačního kritéria dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(\log(2^n))^{\log(2^n)}} < \infty$$

Kondenzační kritérium

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.

Podle kondenzačního kritéria dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\log(2^n))^{\log(2^n)}} < \infty$$

Kondenzační kritérium

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.

Podle kondenzačního kritéria dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\log(2^n))^{\log(2^n)}} < \infty$$

Dále:

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{(\log(2^n))^{\log(2^n)}}} = \frac{2}{(n \log 2)^{\log 2}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Integrální kritérium

Věta (integrální kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a nechť* f *je nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce na intervalu* $[n_0, \infty)$ *pro nějaké* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Pokud* $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$, *potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff (N) \int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Integrální kritérium

Věta (integrální kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a nechť* f *je nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce na intervalu* $[n_0, \infty)$ *pro nějaké* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Pokud* $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$, *potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff (N) \int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$.

Integrální kritérium

Věta (integrální kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a nechť* f *je nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce na intervalu* $[n_0, \infty)$ *pro nějaké* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Pokud* $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$, *potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff (N) \int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$.

Položíme $a_n := \frac{1}{n \log^p n}$ *a* $f(x) := \frac{1}{x \log^p x}$, $x \in [2, \infty)$.

Integrální kritérium

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$.

Integrální kritérium

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$.

Položíme $a_n := \frac{1}{n \log^p n}$ *a* $f(x) := \frac{1}{x \log^p x}$, $x \in [2, \infty)$.

Integrální kritérium

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$.

Položíme $a_n := \frac{1}{n \log^p n}$ *a* $f(x) := \frac{1}{x \log^p x}$, $x \in [2, \infty)$.

Protože f *je nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce na intervalu* $[2, \infty)$ *a platí* $a_n = f(n)$, $n \geq 2$, *dostáváme podle integrálního kritéria:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} < \infty \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x} \, dx < \infty.$$

Integrální kritérium

Příklad

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$.

Položíme $a_n := \frac{1}{n \log^p n}$ *a* $f(x) := \frac{1}{x \log^p x}$, $x \in [2, \infty)$.

Protože f *je nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce na intervalu* $[2, \infty)$ *a platí* $a_n = f(n)$, $n \geq 2$, *dostáváme podle integrálního kritéria:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} < \infty \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx < \infty.$$

Pro $p \neq 1$ *dostáváme*

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx = \int_{\log 2}^{\infty} t^{-p}\, dt = \left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_{\log 2}^{\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } p < 1 \\ \frac{\log^{1-p} 2}{p-1} & \text{pro } p > 1 \end{cases}$$

Integrální kritérium

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} < \infty \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx < \infty.$$

Pro $p \neq 1$ dostáváme

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx = \int_{\log 2}^{\infty} t^{-p}\, dt = \left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_{\log 2}^{\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \ p < 1 \\ \frac{\log^{1-p} 2}{p-1} & \text{pro } \ p > 1 \end{cases}$$

Integrální kritérium

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} < \infty \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx < \infty.$$

Pro $p \neq 1$ dostáváme

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx = \int_{\log 2}^{\infty} t^{-p}\, dt = \left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_{\log 2}^{\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \ p < 1 \\ \frac{\log^{1-p} 2}{p-1} & \text{pro } \ p > 1 \end{cases}$$

Pro $p = 1$ dostáváme

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t}\, dt = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = +\infty.$$

Integrální kritérium

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} < \infty \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx < \infty.$$

Pro $p \neq 1$ dostáváme

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx = \int_{\log 2}^{\infty} t^{-p}\, dt = \left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_{\log 2}^{\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \ p < 1 \\ \frac{\log^{1-p} 2}{p-1} & \text{pro } \ p > 1 \end{cases}$$

Pro $p = 1$ dostáváme

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t}\, dt = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = +\infty.$$

Celkově tedy platí

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} < \infty \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}\, dx < \infty \iff p > 1.$$

Řady s obecnými členy

Definice (absolutní konvergence)

Říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pokud platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Řady s obecnými členy

Definice (absolutní konvergence)

Říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pokud platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Věta (konvergence a absolutní konvergence)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, potom konverguje.*

Řady s obecnými členy

Věta (Abel-Dirichletovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti s reálnými členy,* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotonní.*
Pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *(Abel)* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *omezená a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*
- *(Dirichlet)* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezené částečné součty.*

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Řady s obecnými členy

Věta (Abel-Dirichletovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti s reálnými členy,* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotonní.*
Pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *(Abel)* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *omezená a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*
- *(Dirichlet)* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezené částečné součty.*

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Důležité tvrzení: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro $x \in \mathbb{R}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezené částečné součty pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{N}\}$.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n^2}$.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3} n)}{n^2}$.

Nutná podmínka splněna.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n^2}$.

Nutná podmínka splněna.

Nejprve vyšetříme absolutní konvergenci: $|a_n| = \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n^2}\right| < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje.}$$

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Nutná podmínka splněna.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Nutná podmínka splněna.

Nejprve absolutní konvergence: $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ a tedy řada nekonverguje absolutně.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Nutná podmínka splněna.

Nejprve absolutní konvergence: $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ a tedy řada nekonverguje absolutně.

Ale $(-1)^n$ má omezené částečné součty a zjevně $\frac{1}{n} \searrow 0$.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Nutná podmínka splněna.

Nejprve absolutní konvergence: $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ a tedy řada nekonverguje absolutně.

Ale $(-1)^n$ má omezené částečné součty a zjevně $\frac{1}{n} \searrow 0$.

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní a

- (Dirichlet) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Nutná podmínka splněna.

Nejprve absolutní konvergence: $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ a tedy řada nekonverguje absolutně.

Ale $(-1)^n$ má omezené částečné součty a zjevně $\frac{1}{n} \searrow 0$.

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní a

- (Dirichlet) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty.

Stačí položit $a_n := (-1)^n$ a $b_n := \frac{1}{n}$ a dostáváme, že řada konverguje.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}$.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3} n)}{n}$.

Nutná podmínka splněna.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}$.

Nutná podmínka splněna.
Nejprve absolutní konvergence:

$$\left\{\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right|\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \ldots$$

$$|a_{3n-2}| = \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{3}(3n-2))}{3n-2}\right| = \frac{|\sin(\pi n - \frac{2\pi}{3}))|}{3n-2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-2} \geq \frac{1}{6n}.$$

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}$.

Nutná podmínka splněna.
Nejprve absolutní konvergence:

$$\left\{\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right|\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \ldots$$

$$|a_{3n-2}| = \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{3}(3n-2))}{3n-2}\right| = \frac{|\sin(\pi n - \frac{2\pi}{3}))|}{3n-2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-2} \geq \frac{1}{6n}.$$

A tedy $s_{3N-2} = \sum_{n=1}^{3N-2} \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}\right| \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{6n} \to \infty, \quad N \to \infty$

pause

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}$ nekonverguje absolutně.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3} n)}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro $x \in \mathbb{R}$.

Navíc $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro $x \in \mathbb{R}$.

Navíc $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní a

- (Dirichlet) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro $x \in \mathbb{R}$.

Navíc $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní a

- (Dirichlet) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty.

A tedy stačí položit $a_n = \sin(\frac{\pi}{3}n)$ a $b_n = \frac{1}{n}$ a dostaneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}$ konverguje.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}$

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}$

Nejprve absolutní konvergence: platí

$$\left|(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}\right| = \frac{\arctan(2^n)}{n}$$

a

$$\frac{\arctan(2^n)}{n} \geq \frac{\arctan(1)}{n}$$

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}$

Nejprve absolutní konvergence: platí

$$\left|(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}\right| = \frac{\arctan(2^n)}{n}$$

a

$$\frac{\arctan(2^n)}{n} \geq \frac{\arctan(1)}{n}$$

Srovnáním s $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dostáváme, že $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}$ nekonverguje absolutně.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}$

Položíme $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ a $b_n = \arctan 2^n$.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}$

Položíme $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ a $b_n = \arctan 2^n$.Máme

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní a

- (Abel) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Řady s obecnými členy - příklady

Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}$

Položíme $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ a $b_n = \arctan 2^n$.Máme

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní a

- (Abel) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

A tedy $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(2^n)}{n}$ konverguje.

Checklist

- nutná podmínka (NE): nekonverguje
- řady s nezápornými členy
  - nutná podmínka (ANO - znám asymptotiku): srovnávací kritérium
  - nutná podmínka (ANO - neznám asymptotiku, NEVÍM):
    - (podobá se itegrálu): integrální kritérium
    - (obsahuje logaritmy): kondenzační kritérium
    - (obsahuje faktoriály, kombinační čísla): podílové kritérium
    - (obsahuje mocníny): odmocninové kritérium
- řady s obecnými členy
  - absolutní konvergence (viz výše)
  - hledáme část s omezenými částečnými součty
    - zbytek monotonní: Dirichlet
    - monotonie není jasná: Abel (+ Dirichlet)