Řešení DÚ 9.11.

pátek 13. listopadu 2020 18:04

(1) Nejprve si spočítáme

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{\log x}\cdot\left(\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\cdot(\log x+1)$$

To dává

$$(x^{(x^x)})' = (e^{x^x\cdot\log x})' = e^{x^x\cdot\log x}\cdot(x^x\cdot\log x)'$$

$$= x^{(x^x)}\cdot\left[x^x(\log x+1)\cdot\log x + x^x\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$= x^{(x^x)}\cdot\left[x^x\cdot\log x\cdot(\log x+1) + x^{x-1}\right]$$

Definiční obor $(0,\infty)$.

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$

$x\neq k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$ platí $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x}}$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin x\cos x}{|\sin x|}=\sqrt{2}\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x).$$

$$f'_{\pm}(k\pi)=\lim_{x\to k\pi\pm}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\lim_{x\to 0\pm}2\cdot\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0\pm}2\operatorname{sgn}x\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}}=\pm 2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{2}$$

Použili jsme dvakrát VOLSF

(a) $f(x)=2x$ $g(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ $a=0$ $b=0$ $c=1$

$f(x)\neq 0$ pro $x\in P(0,1)$ $\Rightarrow$ (P)

(b) $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}$ $g(x)=\sqrt{x}$ $a=0$ $b=1$ $c=1$

g spojitá v 1 $\Rightarrow$ (S)

Speciálně tedy dostáváme, že $f'(k\pi)$ neexistuje.

Alternativní šlo upravit rovnou

$$f(x) = \sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{1-\cos^2 x+\sin^2 x} = \sqrt{2\sin^2 x} = \sqrt{2}\,|\sin x|$$

Pro $x \neq k\pi$ dostáváme (pomocí $(|x|)' = \operatorname{sgn} x \quad x \neq 0$)

$$f'(x) = \sqrt{2}\cdot \operatorname{sgn}(\sin x)\cdot \cos x$$

Jednostranné derivace v bodech $k\pi$ šly rovněž spočítat jako limity derivací. Platí totiž, že f je spojitá na $\mathbb{R}$ ($\sin x$ i $|x|$ jsou spojité na $\mathbb{R}$) a pak už jen spočítáme

$$\lim_{x\to k\pi\pm} f'(x) = \lim_{x\to k\pi\pm} \sqrt{2}\cdot \operatorname{sgn}(\sin x)\cdot \cos x = \pm\sqrt{2}\,.$$