Řešení DÚ 21.12.

čtvrtek 31. prosince 2020 1:09

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \arctan x$$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f spojitá na D_f
- f je lichá ($\frac{1}{2x}$ i arctan liché) není sudá ani periodická
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 0\pm} f(x) = \pm\infty$
- $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad D_{f'} = D_f$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0\pm} f'(x) = -\infty$
- pro $x \in D_f$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{2x^2} \iff 2x^2 > 1 + x^2 \iff |x| > 1$$

$$f'(x) < 0 \iff |x| < 1$$

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$+$	$-$	$-$	$+$
↗	↘	↘	↗

-1 bodem lok. maxima

1 bodem lok. minima

- $f''(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad D_{f''} = D_f$

pro $x>0$

$$f''(x)>0 \iff \frac{1}{x^3} > \frac{2x}{(1+x^2)^2} \iff (1+x^2)^2 > 2x^4$$

$$\iff 1+2x^2+x^4 > 2x^4 \iff x^4-2x^2-1<0$$

$$\iff x^2 < 1+\sqrt{2} \iff x<\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

a obdobně $f''(x)<0 \iff x>\sqrt{1+\sqrt{2}}$

$(-\infty,-\sqrt{1+\sqrt{2}})$	$(-\sqrt{1+\sqrt{2}},0)$	$(0,\sqrt{1+\sqrt{2}})$	$(\sqrt{1+\sqrt{2}},\infty)$
$-$	$+$	$+$	$-$
$\smile$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

z lichosti f''

$\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ inflexní bod

- asymptoty $\quad y=\pm\frac{\pi}{2}$ v $\pm\infty$ (okamžitě z limit v $\pm\infty$)

- f klesá na $(0,1]$ a roste na $[1,\infty)$, tedy 1 je bodem globálního minima f vzhledem k $(0,\infty)$.
  Obdobně -1 je bodem globálního maxima vzhledem k $(-\infty,0)$.
  Rovněž $\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \pm\infty$
  f je spojitá na D_f a tedy (Darbouxova vlastnost)
  $R_f = (-\infty, f(-1)] \cup [f(1), +\infty) = (-\infty, -\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}, +\infty)$.