Řešení DU 14.12.

pátek 18. prosince 2020 0:20

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n+311n}}{\sqrt[n]{2^n+n^{311}}} = ?$$

Platí $2^n \leq 3^n \quad n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{311n}{3^n} = 0 \Rightarrow \exists C\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}: 311n \leq C\cdot 3^n$$

Odtud pro $n\in\mathbb{N}$ $$\underbrace{3}_{a_n} = \sqrt[n]{3^n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2^n+3^n+311n}}_{c_n} \leq \sqrt[n]{(2+C)\cdot 3^n} = \underbrace{3\sqrt[n]{2+C}}_{b_n}$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+C} = 1$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 3 \quad \text{a tedy} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 3$$

podle věty o dvou strážnících.

Podobně $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{311}}{2^n} = 0 \Rightarrow \exists C\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}: n^{311} \leq C\, 2^n$$

Tedy $$\underbrace{2}_{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2^n+n^{311}}}_{c_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{1+C}\cdot 2}_{b_n} \qquad n\in\mathbb{N}$$

Opět $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 2 \quad \text{a tedy i} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 2$$

Podle aritmetiky limit $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n+311n}}{\sqrt[n]{2^n+n^{311}}} = \frac{3}{2}$$

(2) $a_1=2 \quad a_{n+1}=2-\frac{1}{\sqrt{a_n}} \quad n\in\mathbb{N} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$

Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existuje vlastní, potom

$$L=\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2-\frac{1}{\sqrt{a_n}} = 2-\frac{1}{\sqrt{L}}$$

Hledáme tedy řešení rovnice $L=2-\frac{1}{\sqrt{L}}$ $\quad (L>0)$

Po substituci $t=\sqrt{L}$ dostaneme rovnici

$$t^2=2-\frac{1}{t} \iff t^3-2t+1=0 \iff (t-1)(t^2+t-1)=0$$

$$\iff t=1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\notin(0,\infty)\right)$$

Máme tedy dvě možná řešení $L=1, \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ (nevlastní nejsou)

protože $a_1=2>1$ zkusíme dokázat

(a) $a_n>1 \quad n\in\mathbb{N}$

(b) $a_{n+1}<a_n \quad n\in\mathbb{N}$

(a) dokážeme matematickou indukcí

platí $a_1=2>1$ ✓

dále $a_n>1 \Rightarrow \sqrt{a_n}>1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_n}}<1 \Rightarrow \overbrace{2-\frac{1}{\sqrt{a_n}}}^{a_{n+1}}>1$

(b) Platí

$$t>1 \Rightarrow (t-1)(t^2+t-1)>0 \Rightarrow t^2 > 2-\frac{1}{t}$$

Pro $t=\sqrt{a_n}$ za použití (a) dostáváme

$$a_n > 2-\frac{1}{\sqrt{a_n}} = a_{n+1} \quad n\in\mathbb{N},$$ což jsme chtěli.

Podle věty o limitě monotonní posloupnosti tedy existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Rovněž platí (podle (a)) $L \geq 1$.

Tedy $L=1$.