Sada příkladů na 9.10.2019

1. Dokažte, že konečné sjednocení kompaktních množin je kompaktní množina. Dokažte, že libovoný průnik kompaktních množin je kompaktní množina.

2. Nechť (X, ρ) a (M, d) jsou dva kompaktní metrické prostory. Dokažte, že množina $X \times M$ vybavená metrikou $\kappa((x,u),(y,v)) = \rho(x,y) + d(u,v)$, $(x,u),(y,v) \in X \times M$, je kompaktní metrický prostor.

3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Mohou existovat uzavřená množina $M \subset X$ a kompaktní množina $K \subset X$ takové, že neexistují $x \in M$ a $y \in K$ splňující $\rho(x,y) = \operatorname{dist}(M,K) = \inf_{u \in M, v \in K} \rho(u,v)$. (Návod: uvažujte K jednobodovou a $X = l^p$.) Lze takové množiny nalézt v $\mathbb{R}^d$.

4. Dokažte, že množina $\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : |x_n| \leq \frac{1}{n}\} \subseteq l^2$ je kompaktní.

5. Dokažte, že množina

$$\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ neklesající}, f(0) = 0, f(1) = 1\} \subseteq C([0,1])$$

není kompaktní.

6. Dokažte, že množina $\{f : [0,1] \to [0,1] : f \text{ 1-Lipschitzovská}\} \subseteq C([0,1])$ je kompaktní.