

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (nutná podmínka konvergence řady). *Pokud nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Věta (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy a předpokládejme, že existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $b_n \geq a_n$, $n \geq N$. Potom*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, nebo ekvivalentně
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Věta (limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = L$. Potom*

1. *pokud $L > 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,*
2. *pokud $L < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,*
3. *pokud $L \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.*

Věta (podílové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potom*

1. *pokud $L < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,*
2. *pokud $L > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Věta (odmocninové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Potom*

1. *pokud $L < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,*

2. *pokud $L > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Důležité limity: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Věta (kondenzační kritérium). *Nechť a_n je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$$

Věta (integrální kritérium). *Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ a $f : [n_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ je nerostoucí a spojitá na intervalu $[n_0, \infty)$. Pokud $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$, potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff (N) \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$.
2. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{4^n}$.
3. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.
4. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$.
5. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1} \right)$.
6. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$.
7. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
8. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^4 + 2n}{(n^2 + n + 111)^2}$.
9. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.
10. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.