Sada příkladů na 10. týden

Co budeme potřebovat z teorie - posloupnosti:

Definice (limita posloupnosti)**.** *Říkíme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $L \in \mathbb{R}^*$ (píšeme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$), pokud platí*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n \in U(L, \varepsilon)$$

Věta (limita monotonní posloupnosti)**.** *Platí*

1. *Každá monotonní posloupnost má limitu.*
2. *Každá shora omezená neklesající (nebo zdola omezená nerostoucí) posloupnost konverguje.*

Definice (limes superior a limes inferior)**.** *Definujeme*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}, & \{a_n\} \textit{ shora omezená}, \\ +\infty, & \textit{jinak}. \end{cases}$$

a

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\}, & \{a_n\} \textit{ zdola omezená}, \\ -\infty, & \textit{jinak}. \end{cases}$$

Příklady na posloupnosti:

1. Spočtěte z definice $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$
2. Spočtěte z definice $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 - 6n^5 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + n^3 + 1}}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{2^{n^2}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, $n \geq 1$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $n \geq 1$

9. Najděte $\limsup\limits_{n\to\infty}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty}$ pro $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2}{3}n\pi$

10. Najděte $\limsup\limits_{n\to\infty}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty}$ $a_n = n(2 + (-1)^n)$

Co budeme potřebovat z teorie - extrémy:

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). *Existuje-li $f'(a)$ a f má v bodě lokální extrém, potom $f'(a) = 0$.*

Věta (existence extrémů na intervalu). *Každá $f \in C([a, b])$ nabývá (vzhledem k $[a, b]$) globálního maxima i minima.*

Věta (derivace a monotonie). *Je-li $f \in C((a, b))$ a existuje-li f' na (a, b), potom:*

1. *pokud $f' > 0$ na (a, b), potom f je rostoucí na (a, b),*
2. *pokud $f' < 0$ na (a, b), potom f je klesající na (a, b),*
3. *pokud $f' \geq 0$ na (a, b), potom f je neklesající na (a, b),*
4. *pokud $f' \leq 0$ na (a, b), potom f je nerostoucí na (a, b).*

Příklady na extrémy:

1. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = e^x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.