

Příklady na bonusové body jsou č.2 a č.6

1. Rozhodněte, zda pro každé zobrazení $f : X \rightarrow Y$, $A, B \subseteq X$ a $C, D \subseteq Y$ platí:
 - a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
 - c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
 - d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
2. Dokažte, že platí $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ pro $f : X \rightarrow Y$ a $A \subseteq X$,
3. Dokažte, že platí $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ pro $f : X \rightarrow Y$ a $B \subseteq Y$,
4. U následujících množin nalezněte $\sup$, $\inf$, $\max$ a $\min$ (pokud existují).
Ověřte z definice.
 - a) $M = (0, 1], [0, 1], (0, \infty)$
 - b) $M = \left\{ \frac{m}{m+n}; m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 - c) $M = \left\{ n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N} \right\}$
 - d) $M = \left\{ 2^{-n} + 3^{-n}; n, m \in \mathbb{N} \right\}$.
5. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:
 - a) $\inf(-A) = -\sup A$
 - b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$Definujeme $-A = \{x; -x \in A\}$, $A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$.
6. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?
7. Nechť M je neprázdna množina a nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že

$$\sup_{x \in M} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x).$$

Musí platit rovnost? Definujeme

$$\sup_{x \in M} f(x) = \sup\{z; z = f(x), x \in M\}.$$