Sada příkladů na 8.10.2018

Příklady na bonusové body jsou č.6 **a č.**10

1. Dokažte matematickou indukcí: $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
2. Dokažte matematickou indukcí: $n^2 \leq 2^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$
3. Dokažte matematickou indukcí: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $x \geq -1$
4. Dokažte matematickou indukcí: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
5. Rozhodněte, zda pro každé zobrazení $f : X \to Y$, $A, B \subseteq A$ a $C, D \subset Y$ platí:
   a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
   c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
   d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
6. Dokažte, že platí $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ pro $f : X \to Y$ a $A \subseteq X$,
7. Dokažte, že platí $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ pro $f : X \to Y$ a $B \subseteq Y$,
8. U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují). Ověřte z definice.
   a) $M = (0, 1],\ [0, 1],\ (0, \infty)$
   b) $M = \left\{\frac{m}{m+n}; m, n \in \mathbb{N}\right\}$
   c) $M = \left\{n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N}\right\}$
   d) $M = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n, m \in \mathbb{N}\right\}$.
9. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:
   a) $\inf(-A) = -\sup A$
   b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
   Definujeme $-A = \{x; -x \in A\}$, $A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$.
10. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?
11. Nechť M je neprázdná množina a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že

$$\sup_{x \in M} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x).$$

Musí platit rovnost? Definujeme

$$\sup_{x \in M} f(x) = \sup\{z; z = f(x), x \in M\}.$$