Sada příkladů na 6. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (nutná podmínka konvergence řady). *Pokud nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta (srovnávající kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s kladnými členy a předpokládejme, že existuje* $N \in \mathbb{N}$ *takové, že* $b_n \geq a_n$, $n \geq N$. *Potom*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, *nebo ekvivalentně*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Věta (limitní srovnávající kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s kladnými členy a* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L$. *Potom*

1. *pokud* $L > 0$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $L < \infty$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
3. *pokud* $L \in (0, \infty)$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

Věta (podílové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a* $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Potom*

1. *pokud* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $L > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Věta (odmocninové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a* $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Potom*

1. *pokud* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $L > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Důležité limity: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Věta (kondenzační kritérium). *Nechť* a_n *je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$$

Věta (integrální kritérium). *Nechť* $N \in \mathbb{N}$ *a* $f : [n_0, \infty) \to [0\infty)$ *je nerostoucí a spojitá na intervalu* $[n_0, \infty)$. *Pokud* $a_n = f(n)$, $n \geq N$, *potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff (N) \int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.
2. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{4^n}$.
3. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.
4. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$.
5. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\right)$.
6. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$.
7. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
8. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^4+2n}{(n^2+n+111)^2}$.