

Sada příkladů na 7.11.2017

1. Zjistěte, kde jsou nespojitě funkce
 - a) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$
 - b) $f(x) = \operatorname{sgn} \cos \frac{1}{x}$.
2. Vyšetřete spojitost složených funkcí $f(g(x))$ a $g(f(x))$, je-li

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad g(x) = x(1 - x^2).$$

3. Dokažte, že jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ spojité v x_0 , pak jsou spojité v x_0 i funkce
 - a) $\min\{f(x), g(x)\}$
 - b) $\max\{f(x), g(x)\}$.
4. Existuje derivace funkce $f(x) = x|x|$ v bodě 0?

5. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1. \end{cases}$$

Určete a, b tak, aby $f(x)$ měla v bodě 1 derivaci.

6. Pro jaké α reálné má funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě 0. Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

7. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě $[-2, ?]$ grafu.

8. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$.

9. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x^2}$.

10. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$.

11. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.

12. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

13. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = x \cdot \arcsin^2(5x + 7)$.

14. Ověřte, že funkce $u(x) = \frac{1}{|x|}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ Laplaceovu rovnici $\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$.

15. Spočtěte $f^{(10)}(x)$ je-li $f(x) = \sqrt{x}$.