Sada příkladů na 2. týden

# Co bude potřeba z teorie:

**Definice.** *Pro zobrazení* $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ *a* $C \subset Y$ *definujeme*

- $f(A)$, ***obraz*** *množiny* $A$ *při zobrazení* $f$, *jako*

$$f(A) = \{y \in Y : \exists\, x \in A : y = f(x)\} = \bigcup_{x \in A} f(x),$$

- $f^{-1}(C)$, ***vzor*** *množiny* $C$ *při zobrazení* $f$, *jako*

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}.$$

**Definice** (omezená množina, supremum a infimum v $\mathbb{R}$)**.** *Množina* $A \subset \mathbb{R}$ *se nazývá*

1. ***shora omezená****, pokud existuje* $x \in \mathbb{R}$ *takové, že pro každé* $y \in A$ *platí* $y \leq x$*, každé takové* $x$ *pak nazýváme horní závorou množiny* $A$*,*
2. ***zdola omezená****, pokud existuje* $x \in \mathbb{R}$ *takové, že pro každé* $y \in A$ *platí* $y \geq x$*, každé takové* $x$ *pak nazýváme dolní závorou množiny* $A$*.*

*Prvek* $x \in \mathbb{R}$ *nazýváme*

1. ***supremem*** *množiny* $A \subset \mathbb{R}$ *(značíme* $x = \sup A$*), pokud neexistuje žádné* $y$ *horní závora* $A$ *takové, že* $y < x$*,*
2. ***infimem*** *množiny* $A \subset \mathbb{R}$ *(značíme* $x = \inf A$*), pokud neexistuje žádné* $y$ *dolní závora* $A$ *takové, že* $y > x$*,*

**Fakt.** *Každá neprázdná shora omezená množina v* $\mathbb{R}$ *má supremum. Každá neprázdná zdola omezená množina v* $\mathbb{R}$ *má infimum.*

**Věta** (Archimedova vlastnost $\mathbb{R}$)**.** *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *takové, že* $n > x$*.*

# Příklady:

1. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

   a) $1 + 2 + \cdots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

   b) $1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + \cdots n)^2$,

d) $n^3 + 2n$ je dělitelné třemi,

e) $n^2 \leq 2^n$ pokud $n \neq 3$,

f) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $x \geq -2$,

g) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2. Rozhodněte, zda pro každé zobrazení $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$ a $C, D \subset Y$ platí:
a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

3. Dokažte, že platí $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ pro $f : X \to Y$ a $A \subseteq X$,

4. Dokažte, že platí $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ pro $f : X \to Y$ a $B \subseteq Y$,

5. U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují). Ověřte z definice.
a) $M = (0, 1],\ [0, 1],\ (0, \infty)$
b) $M = \left\{\frac{m}{m+n}; m, n \in \mathbb{N}\right\}$
c) $M = \left\{n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N}\right\}$
d) $M = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

6. Nechť $A$, $B$ jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:
a) $\inf(-A) = -\sup A$
b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
Definujeme $-A = \{x; -x \in A\}$, $A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$.

7. Nechť $A$, $B$ jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?

8. Nechť $M$ je neprázdná množina a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že

$$\sup_{x \in M} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x).$$

Musí platit rovnost? Definujeme

$$\sup_{x \in M} f(x) = \sup\{z; z = f(x), x \in M\}.$$