Sada příkladů na 10. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Definice (parciální derivace)**.** *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i \in \{1, \dots, d\}$. Říkáme, že f má v bodě a parciální derivaci vzhledem k i-té souřadnici (podle x_i), pokud existuje limita*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

V takovém případě hodnotu limity značíme $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (a nazýváme ji parciální derivací funkce f vzhledem k i-té souřadnici v bodě a).

Vektor

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

nazýváme gradientem funkce f v bodě a.

Definice (parciální derivace vyšších řádů)**.** *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Parciální derivaci 2. řádu funkce f v bodě a vzhledem k i-té a následně j-té souřadnice definujeme jako*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a),$$

pokud existuje a značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \text{pro } i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \quad \text{pro } i = j.$$

Parciální derivace vyšších řádů definujeme analogicky.

Definice (totální diferenciál)**.** *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Říkáme, že f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineální zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ takové, že*

$$\lim_{h \to (0, \dots, 0)} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

V takovém případě nazýváme zobrazení L totálním diferenciálem (derivací) funkce f v bodě a (značíme $df(a)$, $f'(a)$, $D_f(a)$).

Věta (parciální derivace a totální diferenciál)**.** *Nechť f má všechny parciální derivace 1. řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^d$, jsou-li všechny tyto parciální derivace v bodě a spojité, potom f má v bodě a totální diferenciál.*

Věta (tvar totálního diferenciálu)**.** *Má-li f totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ pak f má všechny parciální dedivace 1. řádu v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ a platí*

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i = \nabla f(a) \cdot h.$$

Definice (Jacobiho matice)**.** *Nechť* $F = (F_1, \dots, F_m)$ *je zobrazení z* $\mathbb{R}^d$ *do* $\mathbb{R}^m$*. Nechť* $F_1, \dots, F_m$ *mají všechny parciální* 1. *řádu v bodě* $a \in \mathbb{R}^d$*. Jacobiho maticí zobrazení* F *v bodě* a *definujeme jako*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix}.$$

Věta (tvar derivace zobrazení)**.** *Má-li* F *derivaci v bodě* $a \in \mathbb{R}^d$ *potom*

$$F'(a)(h) = J_f(a) \cdot h.$$

Věta (derivace složeného zobrazení)**.** *Nechť* $F = (F_1, \dots, F_m)$ *je zobrazení z* $\mathbb{R}^d$ *do* $\mathbb{R}^m$ *a* $G = (G_1, \dots, G_k)$ *je zobrazení z* $\mathbb{R}^m$ *do* $\mathbb{R}^k$*. Nechť* $a \in \mathbb{R}^d$ *nechť existují* $F'(a)$ *a* $G'(F(a))$*. Potom* $(G \circ F)'(a)$ *existuje a platí* $(G \circ F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a)$*.*

Příklady

1. Přímým výpočtem ověřte, zda platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pro $f(x,y) = x^2 y - e^{y^3 x}$.

2. Zjistěte, zda platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Spočítejte v bodě $(1,1)$ derivaci ve směru $(1,-1)$ funkce $f(x,y) = e^{xy^2 - yx^3}$.

4. Spočítejte Jacobiho matici zobrazení $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daných předpisy $F(x,y) = (xy, x-y)$, $G(u,v) = (e^{uv}, u^2 - v^2)$. Spočítejte Jacobiho matici zobrazení $G \circ F$ (jak přímo, tak za pomoci věty o derivaci složeného zobrazení).

5. Nechť $F(3,5) = (1,1)$, $F'(3,5) = \begin{pmatrix} 1, 3 \\ -2, -2 \end{pmatrix}$, $\nabla g(1,1) = (4,4)$. Jak vypadá $\nabla(g \circ F)(3,5)$?

6. Má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

7. Má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

8. Má funkce $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

9. Má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{pokud } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pokud } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?