Sada příkladů na 1. týden

# Co budeme potřebovat z teorie

- (per partes pro Newtonův integrál) Nechť mají funkce $f$ a $g$ na intervalu $(a,b)$, $a<b$, primitivní funkci $F$, resp. $G$. Potom
$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx,$$
má-li pravá strana smysl.
- (substituce pro Newtonův integrál) Nechť $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ a $\varphi:(\alpha,\beta)\overset{na}{\to}(a,b)$ má vlastní na $(\alpha,\beta)$ a $\varphi'>0$ (nebo $\varphi'<0$) na $(\alpha,\beta)$. Potom
$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_\alpha^\beta |\varphi'(x)|\cdot f\circ\varphi(x)\,dx,$$
pokud má alespoň jedna strana smysl.
- (plocha pod grafem a mezi grafy) Nechť $f$ je spojitá a nezáporná na intervalu $[a,b]$, potom definujeme plochu pod grafem $f$ na intrervalu $[a,b]$ jako
$$P(f,[a,b]) = \int_a^b f(t)\,dt.$$
Podobně definujeme plochu mezi grafy spojitých funkcí $f$ a $g$ (na $[a,b]$) pro které platí $f\le g$ na $[a,b]$ jako
$$P(f,g,[a,b]) = \int_a^b g(t)-f(t)\,dt.$$
- (výpočet délky křivky) Nechť $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^d$ je taková, že všechny složky $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ mají spojitou derivaci na $[a,b]$. Potom
$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^d (\varphi_i'(t))^2}\,dt$$

# Příklady

### Spočtěte

1. $\int_0^{\log 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx$
2. $\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\, dx$
3. $\int_0^{1} \arccos x\, dx$
4. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$
5. $\int_0^{1} x \log x\, dx$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx$
7. $\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+\varepsilon \cos x}\, dx$, $\varepsilon \in [0,1)$.

### Vyšetřete konvergenci integrálů

1. $\int_0^{1} x^p$, $p \in \mathbb{R}$
2. $\int_1^{\infty} x^p$, $p \in \mathbb{R}$
3. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^p x}$, $p \in \mathbb{R}$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \log^p x}$, $p \in \mathbb{R}$
5. $\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}$
6. $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^{\frac{3}{2}}}$

### Aplikace učitého integrálu

1. Spočtěte plochu mezi grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$.

2. Spočtěte plochu mezi grafy funkcí $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ a $g(x) = x^2$.

3. Spočtěte délku grafu funkce $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

4. Spočtěte délku grafu funkce $f(x) = \log(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

5. Spočtěte délku křivky $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

6. Spočtěte délku křivky $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$, $t \in [0, \infty)$.

7. Spočtěte délku křivky $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$, $t \in [0, T]$.