

## Co bude potřeba z teorie:

Derivace funkce  $f$  v bodě  $a$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

Derivace zleva, resp. zprava

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \text{resp.} \quad f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Vzorečky pro výpočet:

- $(f + g)' = f' + g'$ ,
- $(fg)' = f'g + fg'$ ,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ,
- $(g \circ f)' = f \cdot g' \circ f$

**Věta.** Pokud je  $f$  spojitá v  $a$  zleva, resp. zprava, a pokud existuje limita  $L = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ , resp.  $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ . Potom  $f'_-(a) = L$ , resp.  $f'_+(a) = L$ .

**Věta** (Leibnizův vzorec).

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

## Příklady:

1. Existuje derivace funkce  $f(x) = x|x|$  v bodě 0?

2. Necht

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1. \end{cases}$$

Určete  $a, b$  tak, aby  $f(x)$  měla v bodě 1 derivaci.

3. Pro jaké  $\alpha$  reálné má funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě 0. Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

4. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$  v bodě  $[-2, ?]$  grafu.
5. Vypočtete  $f'$  všude, kde existuje pro  $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ .
6. Vypočtete  $f'$  všude, kde existuje pro  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x^2}$ .
7. Vypočtete  $f'$  všude, kde existuje pro  $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$ .
8. Vypočtete  $f'$  všude, kde existuje pro  $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$ .
9. Vypočtete  $f'$  všude, kde existuje pro  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ .
10. Vypočtete  $f'$  všude, kde existuje pro  $f(x) = x \cdot \arcsin^2(5x+7)$ .
11. Vypočtete  $f'$  (resp.  $f'_\pm$ ) všude, kde existují pro  $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$ .
12. Vypočtete  $f'$  (resp.  $f'_\pm$ ) všude, kde existují pro  $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ .
13. Vypočtete  $f'$  (resp.  $f'_\pm$ ) všude, kde existují pro  $f(x) = \sqrt{1-\cos(2x)}$ .
14. Spočtete  $f^{(10)}(x)$  pro  $f(x) = \sqrt{x}$ .
15. Spočtete  $f^{(13)}(x)$  pro  $f(x) = (x^4 + 3x) \sin x$ .