Co budeme potřebovat z teorie - konstantní koeficienty

Fundamentální systém

Fundamentální systém hledáme následovně:

- nejprve najdeme kořeny charakteristického polynomu
$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_1\lambda + \cdots + a_0,$$
- za každý reálný kořen λ násobnosti k přidáme do fundamentálního systému funkce
$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x},$$
- za každou dvojici komplexně sdružených kořenů $\alpha \pm \beta i$ násobnosti k přidáme do fundamentálního systému funkce
$$e^{\alpha x}\sin(\beta x), e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x), x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

Speciální pravá strana

Předpokládáme, že f má (speciální) tvar
$$f(x) = P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x},$$
kde P a Q jsou polynomy.

Partikulární řešení y_p pak hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = x^k R(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + x^k S(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x},$$
kde $\deg R, \deg S \leq \max(\deg P, \deg Q)$ a k je násobnost kořene $\alpha + \beta i$ v odpovídajícím charakteristickém polynomu.

Variace konstant

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k(x)$, kde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je fundamentální systém homogenní rovnice. Funkce $C_1, \ldots C_n$ najdeme jako řešení soustavy
$$\begin{pmatrix} y_1(x), & \cdots, & u_n(x) \\ y_1'(x), & \cdots, & y_n'(x) \\ \vdots, & \ddots, & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

Příklady

1. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' + 6y' + 9y = 0$.
3. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' + 3y = 0$.
4. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'''' + 8y'' + 16y = 0$.
5. Nalezněte obecné řešení rovnice $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 12y''' - 8y'' = 0$.
6. Nalezněte obecné řešení rovnice $y''' - y'' - 3y' + 27y = 0$.
7. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}$.
8. Nalezněte obecné řešení rovnice $y''' + 4y'' + 4y' = (x+3)e^{-2x}$.
9. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' + 9y = \sin(3x)e^{5x}$.
10. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' + 9y = x^2 \sin(3x)$.
11. Nalezněte obecné řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = x^2 - 1 + 3\cos x$.
12. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + 2y = \cos x(1 + e^x)$.
13. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.
14. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' - y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + x$.
15. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{e^x + 1}$.
16. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.