

Sada příkladů na 1. týden

1. Načrtněte graf funkce $f(x) = |||x| - 1| - 1| - 1|$.
2. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující nerovnici $|x + 1| + |x - 1| \geq 2$.
3. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující nerovnici $\log(x^2 - 2x - 3) \geq 0$.
4. Pro komplexní čísla $z, w \in \mathbb{C}$ dokažte
 - a) $\overline{\overline{z}} = z$,
 - b) $|z| = |\overline{z}|$,
 - c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
 - d) $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$, $z, w \neq 0$,
 - e) $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi}$, $z, w \neq 0$.
5. Nalezněte reálnou a imaginární složku komplexních čísel $(1 + \sqrt{3}i)^3$ a $\frac{2+i}{4-3i}$.
6. Nalezněte velikost a argument komplexních čísel $-2 - 2i$ a $1 + i^{123}$.
7. Nalezněte všechna $z \in \mathbb{C}$ splňující rovnici $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$.
8. Nalezněte všechna $z \in \mathbb{C}$ splňující rovnici $z^5 - 32 = 0$.
9. Dokažte
 - a) $(A \iff B) \iff (B \iff A)$,
 - b) $(A \iff B) \iff ((B \implies A) \wedge (A \implies B))$,
 - c) $(\neg(A \wedge B)) \iff ((\neg A) \vee (\neg B))$,
 - d) $(\neg(A \vee B)) \iff ((\neg A) \wedge (\neg B))$,
 - e) $(\neg(A \implies B)) \iff (A \wedge (\neg B))$.
10. Napište negaci výroku

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} : (x < y) \implies x < y + z.$$

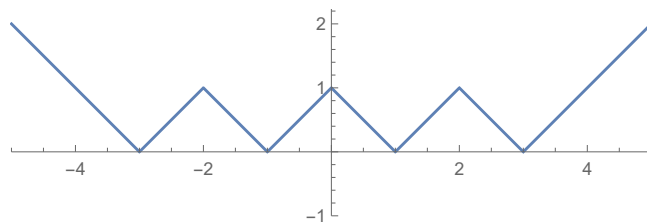
Rozhodněte, zda výrok platí (nebo platí jeho negace).

11. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

- a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
- b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$,

- d) $n^3 + 2n$ je dělitelné třemi,
 e) $n^2 \leq 2^n$ pokud $n \neq 3$,
 f) $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq -2$,
 g) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Některé výsledky:



- 1.
2. nerovnice platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$,
3. $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{5}] \cup [1 + \sqrt{5}, \infty)$,
5. pro $z = (1 + \sqrt{3}i)^3$ a $w = \frac{2+i}{4-3i}$ máme, $z = -8$ a $w = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ a tedy $\operatorname{Re}(z) = -8$, $\operatorname{Im}(z) = 0$, $\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{5}$ a $\operatorname{Im}(w) = \frac{2}{5}$.
6. Pro $z = -2 - 2i$ a $w = 1 + i^{123}$ máme, $|z| = 2\sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{5}{4}\pi$, $|w| = \sqrt{2}$, a $\arg(w) = \frac{7}{4}\pi$.
7. 1 , $-1 + \sqrt{3}i$ a $-1 - \sqrt{3}i$
8. $2(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5})$, $k = 0, \dots, 4$.