Sada příkladů na určitý integrál

1. $\int_0^{\log 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

2. $\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\, dx$

3. $\int_0^1 \arccos x\, dx$

4. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

5. Spočtěte plochu mezi grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$.

6. Spočtěte plochu mezi grafy funkcí $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ a $g(x) = x^2$.

7. Spočtěte délku grafu funkce $f(x) = \log(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

8. Spočtěte délku křivky $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Věty a definice, které budeme používat:

Definice (Newtonův integrál)**.** *Nechť f je definována na intervalu (a,b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ a má na (a,b) primitivní funkci F. Definujeme Newtonův integrál z funkce f na od a do b jako*

$$(N)\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x),$$

pokud má výraz na pravé straně smysl.

Výraz $\lim\limits_{x\to b-} F(x) - \lim\limits_{x\to a+} F(x)$ nazýváme přírůstkem funkce F od a do b a zkráceně jej značíme $[F(x)]_a^b$.

Věta (výpočet určitého integrálu)**.** *Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ mají spojitou derivaci na $[a,b]$, resp. na $[\alpha,\beta]$. Potom*

1. *(per partes)* $\int_a^b f(t)g'(t)\, dt = [F(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\, dt,$

2. *(1. věta o substituci)* $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt,$

3. *(2. věta o substituci) pokud je φ' nenulová na $[\alpha, \beta]$, pak*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \varphi'(t)\cdot f\circ\varphi(t)\, dt = \int_a^b |\varphi'(t)| \cdot f \circ \varphi(t)\, dt.$$

Definice (plocha pod grafem a mezi grafy). *Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, potom definujeme plochu pod grafem f na intrervalu $[a, b]$ jako*

$$P(f, [a, b]) = \int_a^b f(t)\ dt.$$

Podobně definujeme plochu mezi grafy spojitých funkcí f a g (na $[a, b]$) pro které platí $f \leq g$ na $[a, b]$ jako

$$P(f, g, [a, b]) = \int_a^b g(t) - f(t)\ dt.$$

Věta (výpočet délky křivky). *Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ je taková, že všechny složky $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ mají spojitou derivaci na $[a, b]$. Potom*

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (\varphi_i'(t))^2}\ dt$$