Sada příkladů na posloupnosti funkcí

1. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = e^{-nx}$.
2. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
3. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = n^2(1 - \cos\frac{x}{n})$.
4. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \sin^n(x)$.
5. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \arctan(nx)$.
6. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{nx}{1+x^2n^2}$.
7. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
8. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$.
9. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$, $x \in [0,1]$.
10. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \sqrt{n^2+1}(e^{\frac{1}{nx}} - 1)$, $x > 0$.
11. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \sqrt[n]{3^n + x^n}$.
12. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{x^{pn}}{1+n+x^{qn}}$ v závislosti na parametrech p, q pro $x \in (0,\infty)$.

Řešení:

1. Vyšetřete bodovou lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = e^{-nx}$. Konverguje bodově k funkci
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$
na jejím definičním oboru. Konvergence není stejnoměrná, ale je stejnoměrná na intervalech $[a,\infty)$, $a > 0$. Speciálně je tedy lokálně stejnoměrná na $(0,\infty)$.

2. Konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k funkci $f = 0$.

3. Konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k funkci $f = \frac{x^2}{2}$, nikoliv však stejnoměrně.

4. Konverguje bodově k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{N}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

na jejím definičním oboru. Konvergence není stejnoměrná, ale je lokálně stejnoměrná na intervalech $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Konverguje bodově na $\mathbb{R}$ k funkci $f(x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)$, konvergence není stejnoměrná, ale je stejnoměrná na intervalech $(-\infty, -a]$ a $[a, \infty)$, $a > 0$. Speciálně je tedy lokálně stejnoměrná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6. Konverguje bodově na $\mathbb{R}$ k funkci $f = 0$, konvergence není stejnoměrná, ale je stejnoměrná na intervalech $(-\infty, -a]$ a $[a, \infty)$, $a > 0$. Speciálně je tedy lokálně stejnoměrná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. Konverguje bodově k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

na jejím definičním oboru. Konvergence není stejnoměrná, ale je lokálně stejnoměrná na intervalech $(-1, 1)$, $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$.

8. Konverguje lokálně stejnoměrně (nikoliv však stejnoměrně) k funkci $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0, \infty)$.

9. Konverguje bodově k funkci $f = 0$ na $[0, 1]$, konvergence není stejnoměrná, ale je stejnoměrná na intervalu $(0, 1)$.

10. Konverguje bodově na $(0, \infty)$ k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, konvergence není stejnoměrná, ale je lokálně stejnoměrná.

11. Konverguje stejnoměrně k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 3], \\ x, & x > 3. \end{cases}$$

na jejím definičním oboru.