

Sada příkladů na 5. týden

Co bude potřeba z teorie:

Fakt. Pokud $\exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : f(x) = g(x)$ a $L \in \mathbb{R}$, potom

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \right) \iff \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \right).$$

Věta (aritmetika limit). Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, potom:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A + B$,
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
3. pokud $B \neq 0$, pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Důsledek (aritmetika spojitosti). Nechť f a g jsou spojité v bodě a , potom i funkce $f + g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v a . Je-li navíc $g(a) \neq 0$ potom je v a spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta (limita složené funkce). Nechť platí $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ a $\lim_{x \rightarrow B} g(x) = C$. Předpokládejme navíc, že platí alespoň jedna z následujících podmínek:

(S) g je spojitá v bodě B ,

(P) $\exists \delta > 0 \forall x \in P(A, \delta) : f(x) \neq B$.

Potom $\lim_{x \rightarrow A} g \circ f(x) = C$.

Tzv. známé limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Z nich pak lze odvodit další tzv. známé limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a, \quad a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1, \quad \text{alternativně} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x + 1)}{x} = 1$$

Příklady:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3},$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1 - x},$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + 2x) - 2 \sin(a + x) + \sin a}{x^2}, a \in \mathbb{R},$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin mx}, m, n \in \mathbb{N},$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}},$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta,$
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x},$
8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)},$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0,$
10. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin(\pi x))^{\cotan(\pi x)}.$