Co budeme potřebovat z teorie

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)**.** *Pokud má f v bodě a lokální extrém a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Definice (Hessova matice)**.** *Hessovu matici funkce f v bodě a definujeme jako*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(a) \end{pmatrix}$$

Věta (postačující podmínka pro lokální extrém)**.** *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in C^2(G)$, $a \in G$. Nechť navíc $\nabla f(a) = 0$, potom:*

- *je-li $H_f(a)$ pozitivně definitní, potom má f v a lokální minimum,*
- *je-li $H_f(a)$ negativně definitní, potom má f v a lokální maximum,*
- *je-li $H_f(a)$ indefinitní, potom f v a nemá lokální extrém.*

Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)**.** *Nechť $m, d \in \mathbb{N}$, $m < d$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g_1, \dots, g_m : G \to \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$. Položme*

$$M = \{x \in G : g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}.$$

Nechť f má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:

1. *vektory $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a)$ jsou lineárně závislé,*
2. *existují $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(a)$.*

Příklady

1. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Vyšetřete lokální a globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2y - ye^z + 2x + z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
4. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
5. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
6. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
7. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
8. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0\}$.
9. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.
10. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + yz$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.
11. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + y$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ x, y \geq 0\}$.
12. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^3 - 4y = 0,\ y \geq 0\}$.
13. Vyšetřete globální extrémy funkce $x^2 + y^2 + z + 2xz$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$.
14. Vyšetřete globální extrémy funkce $4x^2 + yz$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 48\}$.
15. Nalezněte nejbižší bod k bodu $(0, 0, 0)$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 3z + 3 = x\}$.
16. Jaký je nejbližší a nejvzdálenější bod od počátku ležící v množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 5, x - 2y + z = 10\}$.
17. Nalezněte nejvzdálenější bod od roviny porcházející počátkem a kolmé na vektor $(1, 2, 3)$, ležící v množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.