Co budeme potřebovat z teorie - separované proměnné

Separované proměnné

Řešíme rovnici $y' = f(x)g(y)$ (tzv. rovnice se separovanými proměnnými). Při hledání řešení postupujeme v následujících šesti krocích:

1. definiční obor funkce $f \to$ maximální intervaly $I_1, I_2, \ldots$
2. definiční obor a nulové body funkce $g \to$ max. intervaly $J_1, J_2 \ldots$
3. stacionární řešení (nulové body g)
4. zvolíme každé $I = I_k$ a $J = J_l$ najdeme
   - F primitivní k f na I
   - G primitivní k $\frac{1}{g}$ na J
5. pro $C \in \mathbb{R}$ najdeme maximální intervaly v množině
   $$\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\}$$
   na těch pak máme řešení tvaru $G^{-1}(F(x) + C)$
6. lepení - zde postupojeme podle věty o lepení: nechť y_1 je řešením na (a, b) a y_2 je řešením na (b, c), pokud $\lim\limits_{x \to b-} y_1(x) = L = \lim\limits_{x \to b+} y_2(x)$ a $f(x)g(y)$ je spojitá v (b, L), potom funkce $y : (a, c) \to \mathbb{R}$ definovaná jako
   $$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b), \\ L, & x = b, \\ y_2(x), & x \in (b, c) \end{cases}$$
   je řešením na (a, c).

Homogenní rovnice

Rovnici $y' = F(x, y)$ pro kterou platí $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$, $\lambda \neq 0$ (tzv. homogenní rovnice) můžeme řešit substitucí $z = \frac{y}{x}$ (stačí uvážit $\lambda = \frac{1}{x}$, které dává $F(x, y) = F(1, \frac{y}{x})$).

Příklady - převod na separované proměnné

1. Nalezněte obecné řešení rovnice $xy' + y = y^2$.
2. Nalezněte obecné řešení rovnice $(x^2 - 1)y' = 2xy$.
3. Nalezněte obecné řešení rovnice $xy' = 2x - y$.
4. Nalezněte obecné řešení rovnice $x^2 y' = y(x - y)$.
5. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = \dfrac{1}{x + y + 1}$.

Co budeme potřebovat z teorie - lineární rovnice 1. řádu

Lineární rovnice 1. řádu - metoda integračního faktoru

Jde o rovnici

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Nechť

- $A(x)$ je primitivní funkcí k $a(x)$ na intervalu I
- $B(x)$ je primitivní funkce k funkci $b(x)e^{A(x)}$ (na I),

potom $(ye^{A(x)})' = e^{A(x)}y' + a(x)ye^{A(x)} = b(x)e^{A(x)}$ a tedy $ye^{A(x)} = B(x) + C$, kde C je nějaká reálná konstanta. Všechna řešení rovnice (na I) pak mají tvar

$$y = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Převod na lineární rovnice 1. řádu - Bernoulliho rovnice

Jde o rovnici

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}.$$

Po úpravě

$$(1 - \alpha)y'y^{-\alpha} + (1 - \alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1 - \alpha)q(x)$$

a substituci

$$z = y^{1-\alpha}, \quad a(x) = (1 - \alpha)p(x) \quad \text{a} \quad b(x) = (1 - \alpha)q(x)$$

dostaneme rovnici $z' + a(x)z = b(x)$.

Příklady - lineární rovnice

1. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = 1 - y$.
2. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' + 2x^3 y = x^7$.
3. Nalezněte obecné řešení rovnice $xy' = 2x - y$.
4. Nalezněte obecné řešení rovnice $\cos^2 x y' + y = e^{\tan x}$.
5. Nalezněte obecné řešení rovnice $xy' - y = x^3 e^x$.
6. Nalezněte obecné řešení rovnice $y - 2xy = 2x^3 y^2$.
7. Nalezněte obecné řešení rovnice $y = y + y^2$.
8. Nalezněte obecné řešení rovnice $xy' + y = y^2$.
9. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' + 4\dfrac{y}{x} = 2x\sqrt{y}$.