Sada příkladů na 7.týden

Co bude potřeba z teorie:

Definice (primitivní funkce). *Říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na (otevřeném) intervalu I pokud $F' = f$ na I.*

Definice (neurčitý integrál). *Množinu všech primitivních funkcí k funkci f (na I) značíme $\int f(x)\,dx$ a nazýváme neurčitým integrálem funkce f (na I).*

Je-li F primitivní funkcí k funkci f, platí $\int f(x)\ dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$, což zkráceně zapisujeme $\int f(x)\ dx \stackrel{c}{=} F(x)$ a říkáme, že neurčitý integrál z funkce f je až na konstantu roven funkci F. Často též uvidíte zápis $\int f(x)\ dx = F(x)+C$. Rovněž často vynecháváme závislost na x i symbol dx.

Věta (linearita primitivních funkcí). *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f a G primitivní funkcí k funkci g (obojí na intervalu I) a buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k funkci $\alpha f + \beta g$ (na intervalu I).*

Věta (per partes pro neurčitý integrál). *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f a G primitivní funkcí k funkci g (obojí na intervalu I) a nechť f je spojitá na I. Potom*

$$\int Fg = FG - \int fG \quad (na\ I).$$

Věta (1. věta o substituci pro neurčitý integrál). *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) a nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má vlastní derivaci ve všech bodech intervalu (α, β). Potom*

$$\int \varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)\ dt \stackrel{c}{=} F \circ \varphi \quad na\ (\alpha, \beta).$$

Věta (2. věta o substituci pro neurčitý integrál). *Nechť φ má vlastní a nenulovou derivaci ve všech bodech intervalu (α, β) a nechť $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Pokud pro f definovanou na intervalu (a, b) platí*

$$\int \varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)\ dt \stackrel{c}{=} G(t) \quad na\ (\alpha, \beta)$$

potom

$$\int f(t)\ dt \stackrel{c}{=} G \circ \varphi^{-1}(t) \quad na\ (a, b).$$

- R a T nemají společné kořeny (ani komplexní),
- $\deg R < \deg T$,

- koeficient u nejvyšší mocniny T (tzv. vedoucího monočlenu) ja roven 1,
- $T(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_M)^{m_M} (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \cdots (x^2+p_Nx+q_N)^{n_N}$, čísla a_i odpovídají reálným kořenům T a násobností m_i a kvadratické polynomy $x^2+p_jx+q_j = (x-\beta_j)(x-\overline{\beta}_j)$ odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů T a násobností n_j.

Věta. *Nechť polynomy R a T splňují podmínky výše, potom exsitují (jednoznačně určené) koeficieny A_i^k, B_j^l a C_j^l (indexy v rozsahu, jako suma níže), že*

$$\frac{R(x)}{T(x)} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_i^k}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{n_i} \frac{B_j^l x + C_j^l}{(x^2+p_jx+q_j)^l}.$$

Příklady:

Příklady s jednoduchými substitucemi:

1. $\int \frac{1}{x^2-x+2}\,dx$
2. $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$
3. $\int \sin(3x-5)\,dx$
4. $\int xe^{-x^2}\,dx$,
5. $\int x^3 a^{-x^2}\,dx$
6. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}\,dx$
8. $\int \sin^7 x\,dx$
9. $\int \arccos x\,dx$
10. $\int \operatorname{arcsinh} x\,dx$

11. $\int \operatorname{arctanh} x \, dx$

12. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

Parciální zlomky a substituce vedoucí na parciální zlomky:

1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} \, dx$

2. $\int \frac{1}{(x^3+1)^2} \, dx$

3. $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^3 x} \, dx$

4. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx$

5. $\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} \, dx$

6. $\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx$

7. $\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

8. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \, dx$

9. $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} \, dx$

10. $\int x\sqrt{x^2-2x+2} \, dx$š

11. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} \, dx$

12. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} \, dx$