Sada příkladů na 12. týden

Co budeme potřebovat z teorie:

Definice (Taylorův polynom). *Nechť existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ (nebo, ekvivalentně, existují $f^{(k)} \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$). Potom definujeme polynom*

$$\begin{aligned} T^n_{a,f}(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

a nazýváme ho Taylorův polynom funkce f stupně n se středem v bodě a.

Platí:

$$\begin{aligned} T^n_{0,e^x}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^n}{n!}, \\ T^{2n}_{0,\sinh x}(x) = T^{2n-1}_{0,\sinh x}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \\ T^{2n+1}_{0,\cosh x}(x) = T^{2n}_{0,\cosh x}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \\ T^{2n}_{0,\sin x}(x) = T^{2n-1}_{0,\sin x}(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \\ T^{2n+1}_{0,\cos x}(x) = T^{2n}_{0,\cos x}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \\ T^n_{1,\log x}(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Věta (Peanův tvar zbytku). *Platí $f(x) - T^n_{a,f}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.*

Věta (Lagrangeův a Cauchyův tvar zbytku). *Nechť $f^{(n)}$ existuje a je spojitá na otevřeném nadintervalu intervalu $[a, x]$, $a < x$, a nechť $f^{(n+1)}$ existuje na (a, x). Potom*

- *existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T^f_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \textit{(Lagrangeův tvar)}$$

- *existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T^f_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a), \quad \textit{(Cauchyův tvar)}$$

Příklady:

1. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{x}$ stupně 3 v bodě 1.
2. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ stupně 5 v bodě 0.
3. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(\sin x)$ stupně 6 v bodě 0.
4. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(\sin(\sin(\sin(x))))$ stupně 3 v bodě 0.
5. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte e s chybou maximálně 10^{-4}.
6. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\sin(1)$ s chybou maximálně 10^{-5}.
7. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.
8. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$.
9. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$.
10. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \arctan(x)$ supně 3 v bodě 0. S jeho pomocí spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$.
11. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} x \sin x}{\log^4(1+x)}$.
12. Nalezněte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby limita $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos(\sin x)}{x^n}$ byla konečná a různá od nuly.
13. Nalezněte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby limita $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{x^n}$ byla konečná a různá od nuly.